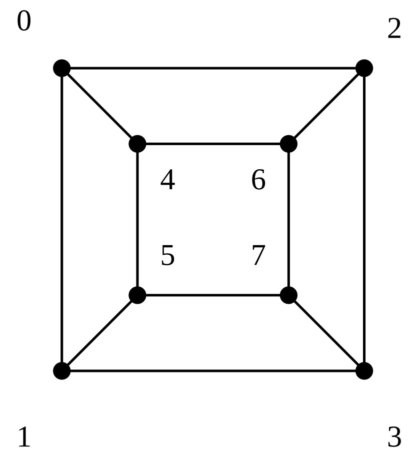
Laskuharjoitus 9

15.03.2001

1. Ramseyn luku $R(k, l)$ on pienin kokonaisluku n, jolle pätee, että kaikissa n solmun täydellisen graafin $\mathbf{K}_n$ kaarten 2-värityksissä esiintyy väistämättä $\mathbf{K}_k$ ensimmäisellä tai $\mathbf{K}_l$ toisella värillä. Osoita, että $R(3, 4) > 8$, konstruoimalla $\mathbf{K}_8$:n kaarten 2-väritys, jossa ei esiinny $\mathbf{K}_3$:a ensimmäisellä eikä $\mathbf{K}_4$:ä toisella värillä ja jolla on syklinen symmetria.

2. Olkoon $\mathcal{G}$ oheinen graafi. Määritä osajoukkojen $\{0, 7\}$ ja $\{0, 1, 2, 3\}$ radat ja stabiloija-aliryhmät ryhmän $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ suhteen. Määritä lisäksi molempien stabiloija-aliryhmien jokin vasen transversaali ryhmän $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ suhteen. (Ryhmän $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})$ alkiot on listattu kirjan taulukossa 6.1, ja Schreier-Sims esitys esimerkissä 6.7.)



Kuva 7: Kuutio.

Laskuharjoituksen 9 vastaukset

1. Käytetään K_8:n symmetriaryhmänä diedraaliryhmää D_8, jonka generoivat permutaatiot $(0,1,2,3,4,5,6,7)$ ja $(0,7)(1,6)(2,5)(3,4)$. (Syklinen ryhmä C_8 on D_8:n aliryhmä, joten D_8-symmetrinen väritys on myös C_8-symmetrinen.) Värityksen symmetrisyys tarkoittaa sitä, että samanväriset kaaret kuvautuvat samanvärisiksi symmetriaryhmän alkion operoidessa kaarien solmuihin, ts. jokaiseen D_8-rataan voidaan käyttää vain yhtä väriä.

   Graafin K_8 kaarijoukon D_8-radat ovat (ks. myös kuva 8)

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \{\{0,1\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},[5,6\},\{6,7\},\{0,7\}\},\\
\Delta_2 &= \{\{0,2\},\{2,4\},\{4,6\},\{0,6\},\{1,3\},\{3,5\},\{5,7\},\{1,7\}\},\\
\Delta_3 &= \{\{0,3\},\{0,5\},\{1,4\},\{1,6\},\{2,5\},\{2,7\},\{3,6\},\{4,7\}\},\\
\Delta_4 &= \{\{0,4\},\{1,5\},\{2,6\},\{3,7\}\}.
\end{aligned}$$

   3-osajoukoilla on 5 D_8-rataa $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_5$, joiden leksikografisesti pienimmät edustajat ovat

$$\gamma_1=\{0,1,2\},\ \gamma_2=\{0,1,3\},\ \gamma_3=\{0,1,4\},\ \gamma_4=\{0,2,4\},\ \gamma_5=\{0,2,5\}.$$

   Vastaavasti 4-osajoukoilla on 8 D_8-rataa $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_8$, joiden leksikografisesti pienimmät edustajat ovat

$$\begin{gathered}
\sigma_1=\{0,1,2,3\},\ \sigma_2=\{0,1,2,4\},\ \sigma_3=\{0,1,2,5\},\\
\sigma_4=\{0,1,3,4\},\ \sigma_5=\{0,1,3,5\},\ \sigma_6=\{0,1,3,6\},\\
\sigma_7=\{0,1,4,5\},\ \sigma_8=\{0,2,4,6\}.
\end{gathered}$$

   2-osajoukkojen ja 3-osajoukkojen ratainsidenssimatriisiksi saadaan

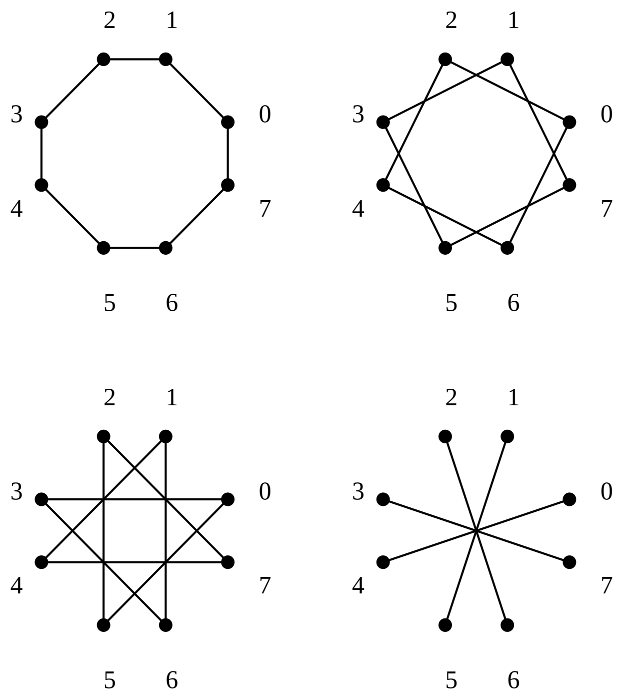
$$\begin{array}{cccccc}
 & \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 & \Gamma_4 & \Gamma_5\\
\Delta_1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0\\
\Delta_2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1\\
\Delta_3 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2\\
\Delta_4 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0
\end{array}.$$

   Vastaavasti 2-osajoukkojen ja 4-osajoukkojen ratainsidenssimatriisiksi saadaan

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \Sigma_1 & \Sigma_2 & \Sigma_3 & \Sigma_4 & \Sigma_5 & \Sigma_6 & \Sigma_7 & \Sigma_8\\
\Delta_1 & 3 & 4 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0\\
\Delta_2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1\\
\Delta_3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0\\
\Delta_4 & 0 & 4 & 2 & 2 & 4 & 0 & 2 & 1
\end{array}.$$

   Ratainsidenssimatriisin alkio rivillä i sarakkeessa j kertoo kuinka moneen radan Γ_j (vastaavasti Σ_j) alkioon radan Δ_i mielivaltainen alkio sisältyy. Esim. radan Δ_1 kaari $\{0,1\}$ sisältyy täsmälleen radan Γ_1 3-osajoukkoihin $\{0,1,2\}$ ja $\{0,1,6\}$.

   Haluttu kaariväritys voidaan nyt ratkaista ratainsidenssimatriisien avulla. Selvästi jokainen 3-osajoukko vastaa yksikäsitteisesti kolmesta kaaresta koostuvaa kolmiota ja toisaalta jokainen 4-osajoukko $\binom{4}{2}=6$ kaaresta koostuvaa 4-klikkiä. Jos kaarivärityksessä esiintyy jokin kolmio värillä 1, värityksen symmetrian perusteella kaikki tämän kolmion kanssa samalla radalla Γ_j olevat



Kuva 8: K_8:n kaarien D_8-radat.

kolmiot on väritetty värillä 1. Tällöin siis kaikkien mahdollisten radan Γ_j kolmioihin (3-osajoukkoihin) sisältyvien kaarien on oltava väritetty värillä 1. Ratainsidenssimatriisin rakenteen perusteella tämä on selvästi mahdollista täsmälleen silloin jos värillä 1 väritettyihin ratoihin sisältyvät kaikki ne radat Δ_i, joilla on ratainsidenssimatriisin sarakkeessa j nollasta poikkeava arvo.

Näin ollen värillä 1 voidaan värittää ratajoukot $\{\Delta_1\}$, $\{\Delta_2\}$, $\{\Delta_3\}$, $\{\Delta_4\}$, $\{\Delta_1, \Delta_3\}$, $\{\Delta_1, \Delta_4\}$ ja $\{\Delta_3, \Delta_4\}$. Koska loput radat pitää pystyä värittämään värillä 2 siten, että värillä 2 ei esiinny 4-klikkiä, saadaan ehdot täyttäviä 2-värityksiä jälkimmäisen ratainsidenssimatriin perusteella 2 kappaletta: ratkaisussa 1 väritetään värillä 1 radat $\{\Delta_1, \Delta_4\}$ ja värillä 2 radat $\{\Delta_2, \Delta_3\}$; ratkaisussa 2 värillä 1 radat $\{\Delta_3, \Delta_4\}$, värillä 2 radat $\{\Delta_1, \Delta_2\}$.

2. Graafin $\mathcal{G}$ automorfismiryhmässä Aut($\mathcal{G}$) on 48 alkiota:

$$\begin{array}{lll}
id & (0,2,3,1)(4,6,7,5) & (0,5,3)(2,4,7) \\
(2,4)(3,5) & (0,2,6,7,5,1)(3,4) & (0,5)(2,7) \\
(1,2)(5,6) & (0,3,6)(1,7,4) & (0,5,3,6)(1,7,2,4) \\
(1,2,4)(3,6,5) & (0,3,5,6)(1,7,4,2) & (0,5,6)(1,7,2) \\
(1,4,2)(3,5,6) & (0,3,6,5)(1,2,7,4) & (0,6,3)(1,4,7) \\
(1,4)(3,6) & (0,3)(1,2)(4,7)(5,6) & (0,6,3,5)(1,4,2,7) \\
(0,1,3,7,6,4)(2,5) & (0,3,5)(2,7,4) & (0,6,5,3)(1,2,4,7) \\
(0,1,3,2)(4,5,7,6) & (0,3)(4,7) & (0,6,5)(1,2,7) \\
(0,1,5,4)(2,3,7,6) & (0,4,6,7,3,1)(2,5) & (0,6)(1,7)(2,4)(3,5) \\
(0,1,5,7,6,2)(3,4) & (0,4,5,1)(2,6,7,3) & (0,6)(1,7) \\
(0,1)(2,3)(4,5)(6,7) & (0,4,6,2)(1,5,7,3) & (0,7)(1,6)(2,5)(3,4) \\
(0,1)(2,5)(3,4)(6,7) & (0,4)(1,5)(2,6)(3,7) & (0,7)(1,6)(2,3)(4,5) \\
(0,2,6,4)(1,3,7,5) & (0,4,5,7,3,2)(1,6) & (0,7)(1,5)(2,6)(3,4) \\
(0,2)(1,3)(4,6)(5,7) & (0,4)(1,6)(2,5)(3,7) & (0,7)(1,5,4,6,2,3) \\
(0,2,3,7,5,4)(1,6) & (0,5,6,3)(1,4,7,2) & (0,7)(1,3,2,6,4,5) \\
(0,2)(1,6)(3,4)(5,7) & (0,5)(1,4)(2,7)(3,6) & (0,7)(1,3)(2,5)(4,5)
\end{array}$$

(Ryhmän generoivat permutaatiot $(0,1,3,7,6,4)(2,5)$ ja $(0,1,3,2)(4,5,7,6)$.) Stabiloija-aliryhmät voi määrittää joko algoritmisesti ensin generoimalla ryhmälle Schreier-Sims esityksen (huomaa, että kirjan algoritmissa 6.9 on painovirhe; errata löytyy osoitteesta `http://www.math.mtu.edu/~kreher/cages.html`) ja tämän jälkeen käymällä algoritmin 6.6 avulla ryhmän kaikki alkiot läpi ja tulostamalla ne, jotka kuvaavat joukot $\{0,7\}$ ja $\{0,1,2,3\}$ itselleen. Toisaalta ainakin joukon $\{0,7\}$ stabiloijat

$$\begin{array}{lll}
id & (1,4,2)(3,5,6) & (0,7)(1,5)(2,6)(3,4) \\
(2,4)(3,5) & (1,4)(3,6) & (0,7)(1,5,4,6,2,3) \\
(1,2)(5,6) & (0,7)(1,6)(2,5)(3,4) & (0,7)(1,3,2,6,4,5) \\
(1,2,4)(3,6,5) & (0,7)(1,6)(2,3)(4,5) & (0,7)(1,3)(2,5)(4,5)
\end{array}$$

on helppo nähdä ryhmän sykliesityksestä suoraan. Stabiloija-aliryhmän Aut$(\mathcal{G})_{\{0,7\}}$ koko on siis 12, joten joukon $\{0,7\}$ radan ja toisaalta stabiloijan vasemman transversaalin koko on

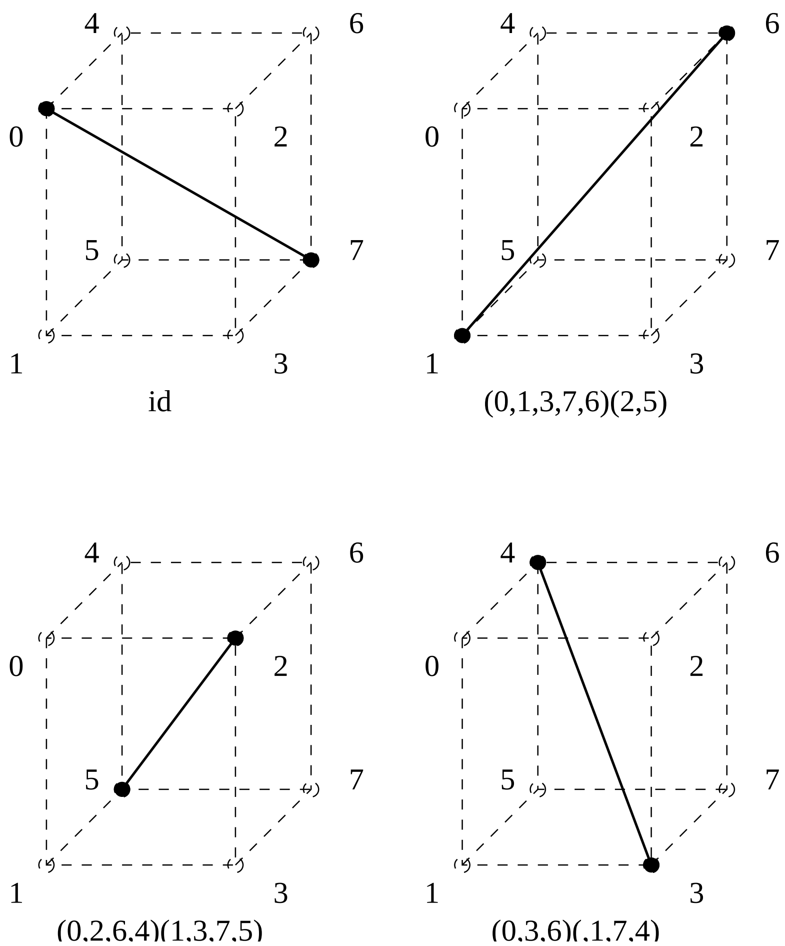
$$|\text{Aut}(\mathcal{G})|/|\text{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,7\}}| = 48/12 = 4.$$

Vasemman transversaalin voi määrittää esim. kirjan algoritmilla 6.17, joka laskee juuri vasemman transversaalin (tätä ei erikseen mainita kirjan tekstissä). Erääksi vasemmaksi transversaaliksi saadaan

$$\begin{array}{ll}
g_1 = id & g_3 = (0,2,6,4)(1,3,7,5) \\
g_2 = (0,1,3,7,6,4)(2,5) & g_4 = (0,36)(1,7,4)
\end{array}.$$

Osajoukon $\{0,7\}$ rata ja vastaava transversaali on esitetty kuvassa 9. Vastaavasti osajoukon $\{0,1,2,3\}$ stabiloija-aliryhmä Aut$(\mathcal{G})_{\{0,7\}}$ koostuu permutaatioista

$$\begin{array}{ll}
id & (0,2)(1,3)(4,6)(5,7) \\
(1,2)(5,6) & (0,2,3,1)(4,6,7,5) \\
(0,1,3,2)(4,5,7,6) & (0,3)(1,2)(4,7)(5,6) \\
(0,1)(2,3)(4,5)(6,7) & (0,3)(4,7)
\end{array},$$

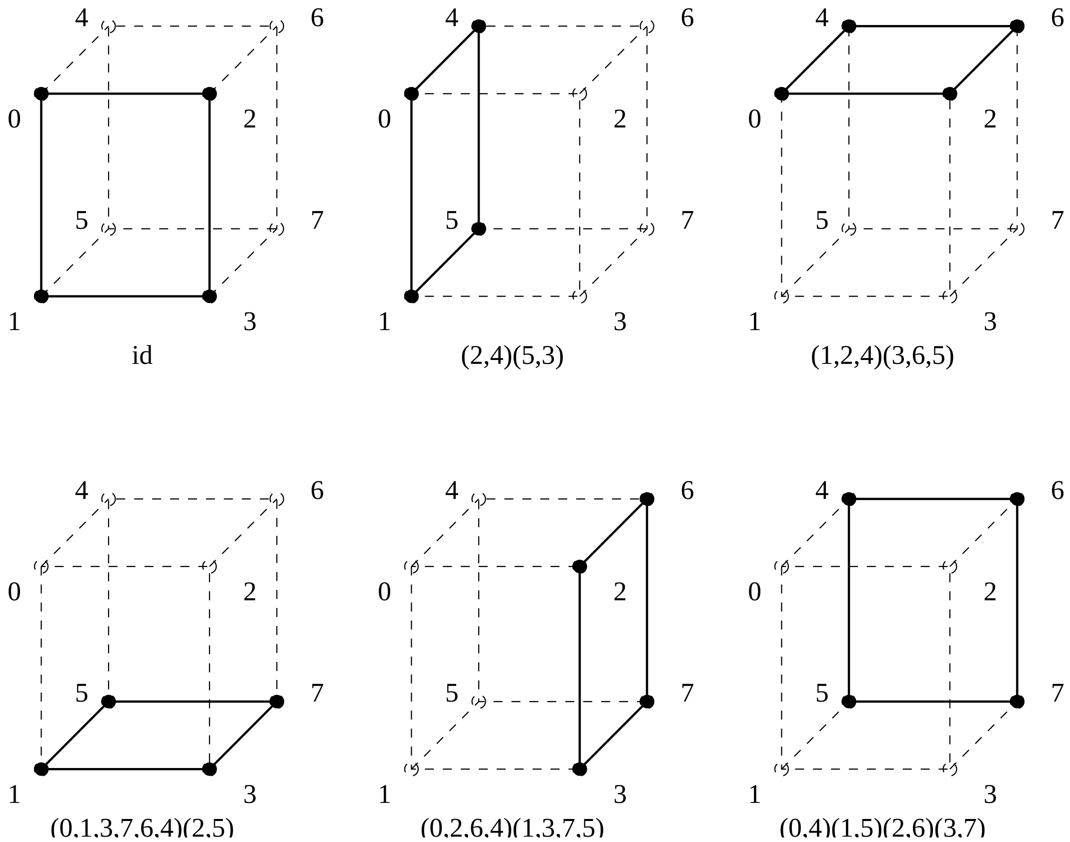


Kuva 9: Osajoukon $\{0,7\}$ rata ja tätä vastaavat stabiloijan $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,7\}}$ erään vasemman transversaalin alkiot.

joten osajoukon $\{0,1,2,3\}$ radan pituus ja toisaalta $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,7\}}$:n vasemman transversaalin koko on $48/8 = 6$. Eräs vasen transversaali koostuu permutaatioista

$$\begin{array}{lll} g_1 = id & g_3 = (1,2,4)(3,6,5) & g_5 = (0,2,6,4)(1,3,7,5) \\ g_2 = (2,4)(5,3) & g_4 = (0,1,3,7,6,4)(2,5) & g_6 = (0,4)(1,5)(2,6)(3,7) \end{array}.$$

Osajoukon rata ja vastaavat transversaalin alkiot on esitetty kuvassa 10.



Kuva 10: Osajoukon $\{0,1,2,3\}$ rata ja tätä vastaavat stabiloijan $\mathrm{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,1,2,3\}}$ erään vasemman transversaalin alkiot.