Laskuharjoitus 8

08.03.2001

1. Kirjan tehtävä 6.7: Tutkitaan joukon $\{0, 1, \ldots, 9\}$ permutaatioryhmää G, jonka Schreier-Sims-esitys on

$$\overrightarrow{G} = (\beta : [\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_9]) \,,$$

missä $\beta = \mathbf{I}$ ja

$$\mathcal{U}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I},\ (0,1,3,6)\,(2,5,9,7)\,(4,8)\,,\ (0,2,5,9,6)\,(1,4,8,3,7)\,, \\ (0,3)\,(1,6)\,(2,9)\,(5,7)\,,\ (0,4,9,6)\,(1,2,5,8)\,(3,7)\,, \\ (0,5,6,2,9)\,(1,8,7,4,3)\,,\ (0,6,9,5,2)\,(1,7,3,8,4)\,, \\ (0,7,6)\,(1,2,8)\,(3,4,9)\,,\ (0,8,4,1,9)\,(2,5,3,6,7)\,, \\ (0,9,2,6,5)\,(1,3,4,7,8) \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I},\ (1,2)\,(3,4)\,(6,7)\,,\ (1,3,6)\,(2,4,7)\,(5,9,8)\,, \\ (1,4)\,(2,3)\,(6,7)\,(8,9)\,,\ (1,6)\,(2,7)\,(5,9)\,,\ (1,7,3,2,6,4)\,(5,8,9) \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{\mathbf{I}\}\,, \qquad \mathcal{U}_3 = \{\mathbf{I},\ (3,6)\,(4,7)\,(5,8)\}\,,$$

$$\mathcal{U}_4 = \mathcal{U}_5 = \mathcal{U}_6 = \mathcal{U}_7 = \mathcal{U}_8 = \mathcal{U}_9 = \{\mathbf{I}\}\,.$$

Mitkä seuraavista permutaatioista kuuluvat ryhmään G?

(a) $\alpha = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$
(b) β=$(0, 1, 2, 3, 4)\ (5, 6, 7, 8, 9)$
(c) γ=$(0, 3, 5, 8, 7)\ (1, 9, 2, 6, 4)$

0	1	2
3	4	5
6	7	8

Kuva 6: Neliö ja 9 pikkuneliötä.

2. Neliö jaetaan 9 pikkuneliöön, joista osa väritetään mustiksi. Kaksi väritystä samaistetaan, jos toinen saadaan ensimmäisestä kiertämällä ja/tai peilaamalla koko neliötä.

(a) Kuinka monella eri tavalla voidaan värittää 5 pikkuneliötä?
(b) Anna kaikki kahdeksan erilaista 2 pikkuneliön väritystä.

Laskuharjoituksen 8 vastaukset

1. Edetään kutakuinkin kirjan algoritmin 6.8 tapaan:

   (a) Koska α kuvaa alkion 0 alkiolle 1, etsitään $h_0 \in \mathcal{U}_0$, joka kuvaa alkion 0 alkiolle 1. Sellainen löytyy: $h_0 = (0,1,3,6)\,(2,5,9,7)\,(4,8)$. Kertomalla α tämän käänteiselementillä saadaan $h_0^{-1}\alpha = (0)\,(1,7,9,5,3,8,4,2)\,(6)$. Koska tässä 1 kuvautuu 7:lle, etsitään $h_1 \in \mathcal{U}_1$, joka kuvaa 1:n 7:lle. Sellainen löytyy: $h_1 = (1,7,3,2,6,4)\,(5,8,9)$. Nyt $h_1^{-1}h_0^{-1}\alpha = (0)\,(1)\,(2,4,3,5,7,8,6)\,(9)$. Koska tässä 2 kuvautuu 4:lle, etsitään $h_2 \in \mathcal{U}_2$, joka kuvaa 2:n 4:lle. Sellaista ei löydy, joten $\alpha \notin G$.

   (b) Koska β kuvaa alkion 0 alkiolle 1, etsitään $h_0 \in \mathcal{U}_0$, joka kuvaa alkion 0 alkiolle 1. Sellainen löytyy: $h_0 = (0,1,3,6)\,(2,5,9,7)\,(4,8)$. Kertomalla β tämän käänteispermutaatiolla saadaan $h_0^{-1}\beta = (0)\,(1,7,4,6,9,2)\,(3,8,5)$. Koska tässä 1 kuvautuu 7:lle, etsitään $h_1 \in \mathcal{U}_1$, joka kuvaa 1:n 7:lle. Sellainen löytyy: $h_1 = (1,7,3,2,6,4)\,(5,8,9)$. Nyt $h_1^{-1}h_0^{-1}\beta = (0)\,(1)\,(2,4)\,(3,5,7,6,8,9)$. Koska tässä 2 kuvautuu 4:lle, etsitään $h_2 \in \mathcal{U}_2$, joka kuvaa 2:n 4:lle. Sellaista ei löydy, joten $\beta \notin G$.

   (c) Koska γ kuvaa alkion 0 alkiolle 3, etsitään $h_0 \in \mathcal{U}_0$, joka kuvaa alkion 0 alkiolle 3. Sellainen löytyy: $h_0 = (0,3)\,(1,6)\,(2,9)\,(5,7)$. Kertomalla γ tämän käänteispermutaatiolla saadaan $h_0^{-1}\gamma = (0)\,(1,2)\,(3,7)\,(4,6)\,(5,8)\,(9)$. Koska tässä 1 kuvautuu 2:lle, etsitään $h_1 \in \mathcal{U}_1$, joka kuvaa 1:n 2:lle. Sellainen löytyy: $h_1 = (1,2)\,(3,4)\,(6,7)$. Nyt $h_1^{-1}h_0^{-1}\gamma = (0)\,(1)\,(2)\,(3,6)\,(4,7)\,(5,8)\,(9)$. Tässä 2 kuvautuu 2:lle; etsitään $h_2 \in \mathcal{U}_2$, joka kuvaa 2:n 2:lle. Sellainen löytyy: $h_2 = \mathbf{I}$. Nyt $h_2^{-1}h_1^{-1}h_0^{-1}\gamma = (0)\,(1)\,(2)\,(3,6)\,(4,7)\,(5,8)\,(9)$. Koska tässä 3 kuvautuu 6:lle, etsitään $h_3 \in \mathcal{U}_3$, joka kuvaa 3:n 6:lle. Sellainen löytyy: $h_3 = (3,6)\,(4,7)\,(5,8)$. Nyt $h_3^{-1}h_2^{-1}h_1^{-1}h_0^{-1}\gamma = \mathbf{I}$. Tämä kuvaa kaikki alkiot itselleen, ja $\mathbf{I} \in \mathcal{U}_n$ kaikille $n \geq 4$, joten $\gamma \in G$.

2. Annetun neliön symmetriaryhmä G on isomorfinen ryhmän D_8 kanssa. Ryhmän muodostavat permutaatiot

$$
\begin{aligned}
g_0 &= (0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8)\\
g_1 &= (0,2,8,6)(1,5,7,3)(4)\\
g_2 &= (0,8)(1,7)(2,6)(5,3)(4)\\
g_3 &= (0,6,8,2)(1,3,7,5)(4)\\
g_4 &= (0,2)(3,5)(6,8)(1)(4)(7)\\
g_5 &= (1,5)(0,8)(3,7)(2)(4)(6)\\
g_6 &= (0,6)(1,7)(2,8)(3)(4)(5)\\
g_7 &= (1,3)(2,6)(5,7)(0)(4)(8).
\end{aligned}
$$

Permutaatioiden tyypit ovat

$$
\begin{aligned}
\mathrm{type}(g_0) &= (9,0,0,0,0,0,0,0,0)\\
\mathrm{type}(g_{1,3}) &= (1,0,0,2,0,0,0,0,0)\\
\mathrm{type}(g_2) &= (1,4,0,0,0,0,0,0,0)\\
\mathrm{type}(g_{4,5,6,7}) &= (3,3,0,0,0,0,0,0,0).
\end{aligned}
$$

(a) Montako 5-osajoukkoa kukin permutaatio kuvaa itselleen? Jos permutaation minkä tahansa syklin jokin alkio kuuluu osajoukkoon, kaikkien ko. syklin alkioiden on kuuluttava osajoukkoon, jotta permutaatio kuvaisi osajoukon itselleen. Lasketaan siis, montako tapaa on valita permutaation syklejä siten, että syklien yhteenlaskettu pituus on 5.

$$\begin{aligned}
\chi_5(g_0) &= \binom{9}{5} = 126 \\
\chi_5(g_{1,3}) &= \binom{2}{1} = 2 \\
\chi_5(g_2) &= \binom{4}{2} = 6 \\
\chi_5(g_{4,5,6,7}) &= \binom{3}{1}\binom{3}{2} + \binom{3}{3}\binom{3}{1} = 12
\end{aligned}$$

Burnsiden lemmalla

$$N_k = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_k(g)$$

saadaan

$$N_5 = \frac{1}{8}(126 + 2\cdot 2 + 6 + 4\cdot 12) = 23$$

(b) Muodostetaan k-osajoukkojen ratojen edustajajoukot R_k, kun $0 \le k \le 2$. Joukko R_2 tulee olemaan vastaus tehtävään.

$R_0 = \{\emptyset\}$, sillä tyhjä joukko on ainoa 9 alkion osajoukko, jonka koko on 0. Lisätään nyt vuorollaan kuhunkin R_0:n alkioon kukin alkioista $\{0,\ldots,8\}$ ja lisätään syntynyt tulos joukkoon R_1, ellei joukossa R_1 ole jo leksikaalisessa järjestyksessä aikaisemmin tullutta 1-osajoukkoa samalta radalta.

$$R_1 = \{\{0\},\{1\},\overbrace{\{2\}}^{\{0\}},\overbrace{\{3\}}^{\{1\}},\{4\},\overbrace{\{5\}}^{\{1\}},\overbrace{\{6\}}^{\{0\}},\overbrace{\{7\}}^{\{1\}},\overbrace{\{8\}}^{\{0\}}\} = \{\{0\},\{1\},\{4\}\}$$

Otetaan nyt vuorollaan kukin R_1:n joukoista ja lisätään siihen vuorollaan kukin alkio, joka on suurinta joukon alkiota suurempi. Lisätään syntynyt joukko R_2:een, ellei siellä jo ole aikaisempaa 2-osajoukkoa samalta radalta.

$$\begin{aligned}
R_2 = \{ \quad & \{0,1\},\{0,2\},\overbrace{\{0,3\}}^{\{0,1\}},\{0,4\},\{0,5\},\overbrace{\{0,6\}}^{\{0,2\}},\overbrace{\{0,7\}}^{\{0,5\}},\{0,8\}, \\
& \overbrace{\{1,2\}}^{\{0,1\}},\{1,3\},\{1,4\},\overbrace{\{1,5\}}^{\{1,3\}},\overbrace{\{1,6\}}^{\{0,5\}},\{1,7\},\overbrace{\{1,8\}}^{\{0,5\}}, \\
& \overbrace{\{4,5\}}^{\{1,4\}},\overbrace{\{4,6\}}^{\{0,6\}},\overbrace{\{4,7\}}^{\{1,4\}},\overbrace{\{4,8\}}^{\{0,4\}} \}
\end{aligned}$$

ja jäljelle jää siis

$$R_2 = \{\{0,1\},\{0,2\},\{0,4\},\{0,5\},\{0,8\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,7\}\}.$$

Huomautus: Yllä R_{k+1}:ä konstruoitaessa riittää lisätä edellisen R_k:n joukkoihin vuorollaan aiempia suuremmat alkiot, sillä tässä algoritmin versiossa kunkin radan edustajana on aina sen leksikaalisesti pienin alkio. Mille tahansa $k + 1$-osajoukolle $S \in R_{k+1}$, joka siis on ratansa leksikaalisesti pienin alkio, pätee, että joukko $S' = S \setminus \{\max(S)\}$ on myös ratansa pienin alkio, ts. $S' \in R_k$. Tästä seuraa, että jokainen R_{k+1}:n alkio voidaan konstruoida jostakin R_k:n alkiosta lisäämällä siihen aiempia suurempi alkio.