Laskuharjoitus 4

08.02.2000

1. Määritä osituksen $1+3+3+3+7$ rsf-lex rank.

2. Kuinka monella eri tavalla voidaan 30 samanlaista palloa asettaa kuuteen samanlaiseen laatikkoon, jos vaaditaan, että missään kahdessa laatikossa ei ole samaa määrää palloja.

3. Minkä graafin Prüferin listaesitys on $(3,1,4,1,5)$?

4. Neljän termin tulo $abcd$ voidaan ryhmitellä kahden termin tuloiksi viidellä erilaisella tavalla:

$$((ab)c)d, \qquad (a(bc))d, \qquad a((bc)d), \qquad a(b(cd)), \qquad (ab)(cd).$$

   Yleisessä tapauksessa tulossa on $n+1$ termiä. Esitä bijektio erilaisten kahden termin tuloiksi ryhmittelyjen ja Catalanin perheen C_n välille. (Vihje: jokainen ryhmittely voidaan esittää binääripuuna, jonka lehdet koostuvat tulon termeistä.)

Laskuharjoituksen 4 vastaukset

1. Ositus $1+3+3+3+7$ on käänteisessä standardimuodossa (reverse standard form); standardimuoto on $7+3+3+3+1$. Rsf-lex rank on leksikografinen rank osituksien listaesityksille käänteisessä standardimuodossa. Osituksen rsf-rank voidaan laskea seuraavan rekursion (kirjan s. 76) avulla: Oletetaan, että rankattava ositus on standardimuodossa $[a_1, \ldots, a_n]$, missä $a_1 \geq \cdots \geq a_n$. Rekursion perustapauksessa $n = 1$ on aina $\mathsf{rank}([a_1]) = 0$. Tapauksessa $n > 1$ rekursioaskel on

$$\mathsf{rank}([a_1, \ldots, a_n]) = \begin{cases} \mathsf{rank}([a_1, \ldots, a_{n-1}]) & \text{jos } a_n = 1 \\ \mathsf{rank}([a'_1, \ldots, a'_n]) + P(m-1, n-1) & \text{jos } a_n > 1, \end{cases}$$

missä $a'_j = a_j - 1$ kaikilla $1 \leq j \leq n$ ja $m = \sum_{i=1}^{n} a_n$. Soveltamalla rekursioyhtälöä saadaan

$$\mathsf{rank}([7,3,3,3,1]) = \mathsf{rank}([7,3,3,3]) = \mathsf{rank}([6,2,2,2]) + P(16-1, 4-1),$$

josta edelleen

$$\mathsf{rank}([6,2,2,2]) = \mathsf{rank}([5,1,1,1]) + P(12-1, 4-1).$$

Nyt $\mathsf{rank}([5,1,1,1]) = \cdots = \mathsf{rank}([5]) = 0$, joten yhdistämällä saadaan

$$\mathsf{rank}([7,3,3,3,1]) = P(15,3) + P(11,3) = 19 + 10 = 29.$$

2. Oletetaan aluksi, että pallot saa asetella laatikoihin mielivaltaisesti. Jos kuudesta laatikosta $0 \leq k \leq 5$ jätetään tyhjäksi, pallot asetellaan jäljellä oleviin $6-k$ laatikkoon. Numeroidaan ei-tyhjät laatikot $1, \ldots, 6-k$, ja merkitään a_j:llä laatikossa j olevien pallojen lukumäärää. Nyt on selvästi $a_j \geq 1$ kaikilla $j = 1, \ldots, 6-k$, ja toisaalta $\sum_{j=1}^{6-k} a_j = 30$. Näin ollen joukko $\{(a_1, \ldots, a_{6-k}) \ : \ a_j \geq 1 \text{ ja } \sum_{j=1}^{6-k} a_j = 30\}$ käsittää kaikki mahdolliset tavat asetella 30 samanlaista palloa *numeroituihin* laatikoihin. Koska laatikot ovat samanlaisia, lasketaan tällöin kuitenkin tietty osuus asetelmia useampaan kertaan; esimerkiksi asetelmat $(1,1,1,1,1,25)$ ja $(25,1,1,1,1,1)$ tapauksessa $k = 0$ ovat samanlaisia. Samanlaisten asetelmien kertautuminen voidaan välttää vaatimalla lisäksi $a_1 \leq \cdots \leq a_{6-k}$. Tällöin huomataan, että joukon

$$\mathcal{P}(30, 6-k) := \{(a_1, \ldots, a_{6-k}) \ : \ 1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{6-k} \text{ ja } \sum_{j=1}^{6-k} a_j = 30\}$$

alkiot vastaavat itse asiassa luvun 30 erilaisia osituksia $6-k$ osaan, joten joukossa on $P(30, 6-k)$ erilaista asetelmaa. Näin ollen erilaisia asetelmia on kaiken kaikkiaan

$$\sum_{k=0}^{5} P(30, 6-k) = P(30,6) + P(30,5) + \cdots + P(30,1) = 1206.$$

Kielletään nyt sellaiset asetelmat, joissa jossakin kahdessa laatikossa on sama määrä palloja. Tässä tapauksessa selvästi enintään yksi laatikko voidaan jättää tyhjäksi. Olkoon $0 \leq k \leq 1$ tyhjien laatikkojen lukumäärä. Jäljellä olevat

$6-k$ laatikkoa tulisi nyt täyttää siten, että missään kahdessa laatikossa ei ole samaa lukumäärää palloja. Tämä voidaan tehdä vaatimalla $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{6-k}$ ja $\sum_{j=1}^{6-k} a_j = 30$. Näin ollen erilaisia asetelmia on yhtä monta kuin joukossa

$$\mathcal{P}'(30, 6-k) = \{(a_1, \ldots, a_{6-k}) \;:\; 1 \leq a_1 < \cdots < a_{6-k} \text{ ja } \sum_{j=1}^{6-k} a_j = 30\}$$

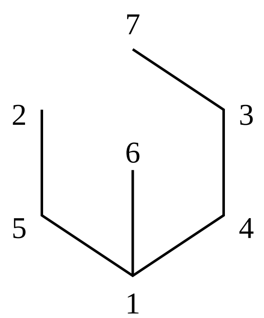
on alkioita. Nyt huomataan, että kuvaus $(a_1, \ldots, a_{6-k}) \mapsto (a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, \ldots, a_{6-k} - (6-k-1))$ joukolta $\mathcal{P}'(30, 6-k)$ ositusten joukolle $\mathcal{P}(30 - 1 - 2 - \cdots - (6-k-1), 6-k)$ on bijektio, joten

$$|\mathcal{P}'(30, 6-k)| = P(30 - \frac{(6-k-1)(6-k)}{2}, 6-k),$$

ja näin ollen erilaisia asetelmia on $P(30-15, 6) + P(30-10, 5) = P(15, 6) + P(20, 5) = 26 + 84 = 110$ kappaletta.

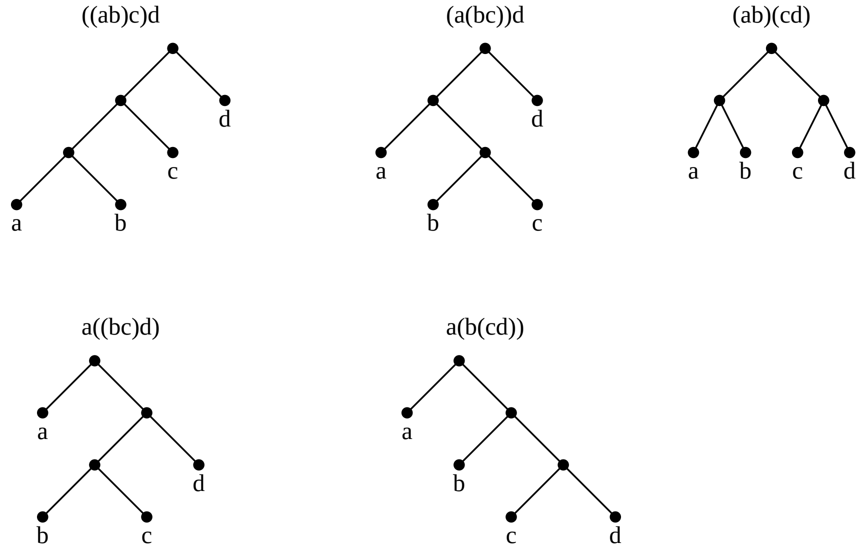
3. Seurataan kirjan algoritmia 3.11. Ensinnäkin, koska listan pituus on 5, on graafin solmuja 7. Kunkin solmun asteluku on yhtä suurempi kuin sen esiintymiskertojen lukumäärä listassa. Listan jatkoksi lisätään (1). Iteroidaan algoritmin mukaisesti: kukin listan alkioista yhdistetään vuorollaan suurinumeroisimpaan solmuun, jonka senhetkinen asteluku on 1 ja vähennetään molempien solmujen astelukua yhdellä.

Solmujen asteluvut	Listan alkio	Kaari
(3,1,2,2,2,1,1)	3	{3,7}
(3,1,1,2,2,1,0)	1	{1,6}
(2,1,1,2,2,0,0)	4	{3,4}
(2,1,0,1,2,0,0)	1	{1,4}
(1,1,0,0,2,0,0)	5	{2,5}
(1,0,0,0,1,0,0)	1	{1,5}



Kuva 3: Prüferin listaesitystä $(3, 1, 4, 1, 5)$ vastaava graafi.

4. Jokaista $n+1$ termin tulon ryhmittelyä kahden alkion tuloiksi vastaa yksikäsitteisesti binääripuu, jonka haaroissa on kertolaskuoperaattori ja lehdissä



Kuva 4: Neljän termin tulon eri ryhmittelytavat ja näitä vastaavat jäsennyspuut.

tulon termit. Kuvassa 4 on esitetty kaikki neljän termin tulon eri ryhmittelytavat ja näitä vastaavat jäsennyspuut.

Täysi binääripuu (full binary tree) on juurellinen puu, jossa jokaisella solmulla on joko nolla tai kaksi lapsisolmua. Oletetaan lisäksi, että jokaisen solmun lapsisolmut on järjestetty, jotta voidaan puhua käsitteistä "vasen" ja "oikea" lapsi. Tällöin on selvää, että jokainen $n+1$ termin jäsennyspuu on täysi binääripuu, jossa on $n+1$ lehtisolmua, ja kääntäen. Induktiolla voidaan osoittaa seuraava aputulos:

Lemma. Täydessä binääripuussa, jossa on $n+1$ lehtisolmua, on täsmälleen n solmua, joilla on kaksi lapsisolmua.

Todistus. Perustapauksessa $n = 0$ väite on ilmeinen. Oletetaan nyt, että väite pätee tapauksissa $0 \leq k \leq n$, ja tarkastellaan täyttä binääripuuta, jossa on $(n+1)+1 \geq 2$ lehtisolmua. On selvää, että tällöin puun juurella tulee olla kaksi lapsisolmua. Olkoon l_1 juuren vasemman lapsen virittämän alipuun lehtisolmujen lukumäärä, ja l_2 vastaavasti juuren oikean lapsen virittämän alipuun lehtisolmujen lukumäärä. Koska juuri ei ole lehtisolmu, on oltava $n+2 = l_1 + l_2$ ja $l_1, l_2 \geq 1$, joten $l_1 \leq n+1$ ja $l_2 \leq n+1$. Näin ollen induktio-oletusta voidaan soveltaa juuren vasemman ja oikean lapsen virittämiin alipuihin, jotka selvästi ovat täysiä binääripuita. Koko puussa on siten $1 + (l_1 - 1) + (l_2 - 1) = l_1 + l_2 - 1 = n + 1$ solmua (juuri mukaanluettuna), joilla on kaksi lapsisolmua. □

Aputuloksen välitön seuraus on, että täydessä binääripuussa, jossa on $n+1$ lehtisolmua, on täsmälleen $2n$ kaarta.

Catalanin perhe C_n koostuu kaikista binäärijonoista, joiden pituus on $2n$, ja jotka ovat tasapainotettuja siten, että jonolle $[a_1, \ldots, a_{2n}] \in \mathbb{Z}_2^{2n}$ pätee

(a) jonossa on täsmälleen n nollaa ja n ykköstä, ja

(b) alijonossa $[a_1, \ldots, a_i]$ on vähintään yhtä monta nollaa kuin siinä on ykköstä kaikilla $1 \leq i \leq 2n$.

Nyt on helppoa johtaa vastaavuus $(n+1)$-lehtisolmuisten täysien binääripuiden ja Catalanin perheen välille:

Olkoon annettu täysi binääripuu, jolla on $n+1$ lehtisolmua. Merkitään kaikki vasempaan lapseen johtavat kaaret nollalla, ja oikeaan lapseen johtavat kaaret ykkösellä. Käydään puu nyt läpi esijärjestyksessä (ensin solmu itse, sitten rekursiivisesti vasen lapsi, ja lopuksi rekursiivisesti oikea lapsi) siten, että tiettyyn solmuun saavuttaessa tulostetaan solmun isään johtavan kaaren numero.

On selvää, että tällöin jokainen $2n$ kaaresta tulostetaan kerran. Lisäksi tulostejono täyttää ehdon (a), koska jokaisella solmulla, jolla on vasen lapsi, on myös oikea lapsi; toisaalta ehto (b) täyttyy, koska jokaisen kaksilapsisen solmun vasempaan lapseen vievän kaaren numero tulostetaan aina ennen oikeaan lapseen vievän kaaren numeroa.

Toisaalta jos on annettu Catalanin perheeseen kuuluva binäärijono $[a_1, \ldots, a_{2n}]$, voidaan sitä vastaava täysi binääripuu konstruoida seuraavasti:

(a) Alussa puu koostuu vain sen juuresta, joka on lehtisolmu. Asetetaan juuri työsolmuksi.

(b) Toistetaan järjestyksessä kaikille $i = 1, 2, \ldots, 2n$:

  i. Jos $a_i = 0$, luodaan työsolmulle vasen lapsi, ja asetetaan lapsi työsolmuksi.

  ii. Jos $a_i = 1$, edetään työsolmusta puun juurta kohti ensimmäiseen sellaiseen solmuun, jolla ei ole oikeata lapsisolmua. Luodaan tälle solmulle oikea lapsisolmu, ja asetetaan se työsolmuksi.

Konstruktio on hyvin määritelty, koska tasapainoehdon (b) mukaan kohdassa (ii) solmu, jolle voidaan lisätä oikea lapsi, on aina olemassa. Toisaalta tasapainoehdosta (a) saadaan, että jokaiselle solmulle, jolle on lisätty vasen lapsi kohdan (i) mukaisesti, lisätään myös oikea lapsi kohdan (ii) mukaisesti. Konstruktion tuloksena syntyy täysi binääripuu, jossa on $2n+1$ solmua ja $2n$ kaarta. Nyt voidaan jälleen osoittaa induktiolla, että tällaisessa puussa on oltava $n+1$ lehtisolmua, ja siten se vastaa jotakin jäsennyspuuta.

Catalanin perheen C_n ja $(n+1)$-lehtisolmuisten täysien binääripuiden bijektiivinen vastaavuus voitaisiin nyt todistaa esimerkiksi toteamalla esitetyt konstruktiot toistensa käänteiskonstruktioiksi.