Laskuharjoitus 3

01.02.2001

1. Määritä permutaation $[2, 1, 4, 6, 3, 5]$ 3 seuraajaa leksikografisessa järjestyksessä.

2. Määritä permutaation $[2, 1, 4, 6, 3, 5]$ 3 seuraajaa Trotter-Johnson minimimuutosjärjestyksessä.

3. Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku ja r kokonaisluku väliltä $0 \leq r \leq n! - 1$. Osoita, että r voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa

$$r = \sum_{i=1}^{n-1} d_i \cdot i!,$$

missä $0 \leq d_i \leq i$ kaikille $i = 1, \ldots, n-1$.

4. Joukon $\{1, \ldots, n\}$ permutaatio on parillinen (pariton) jos se voidaan esittää parillisen (parittoman) määrän transpositioita tulona. Osoita, että parillinen ja pariton permutaatio ovat hyvin määriteltyjä käsitteitä, ts. ei ole olemassa permutaatiota, joka olisi parillinen ja pariton.

Laskuharjoituksen 3 vastaukset

1. Käytetään kirjan algoritmia 2.14 permutaatioon $\pi = [2, 1, 4, 6, 3, 5]$; tällöin $n = 6$. Olkoon $\pi[1] = 2$, $\pi[2] = 1$, $\pi[3] = 4$, jne.

   (a) Etsitään ensin i, jolle pätee
   $$\pi[i] < \pi[i+1] > \pi[i+2] > \cdots > \pi[n].$$
   Saadaan $i = 5$.

   (b) Etsitään seuraavaksi se listan $\pi[i+1], \ldots, \pi[n]$ osa, jonka alkiot ovat pienempiä kuin $\pi[i]$, ts. sellainen j, jolle $\pi[j] > \pi[i]$ ja kaikille k välillä $j < k \leq n$ pätee $\pi[k] < \pi[i]$. Saadaan $j = 6$.

   (c) Vaihdetaan alkiot $\pi[i]$ ja $\pi[j]$ keskenään; tuloksena saadaan listaesitys $[2, 1, 4, 6, 5, 3]$.

   (d) Käännetään alilistan $[\pi[i+1], \ldots, \pi[n]]$ alkioiden järjestys. Tuloksena saadaan seuraajapermutaation listaesitys $[2, 1, 4, 6, 5, 3]$.

   Permutaation $[2, 1, 4, 6, 5, 3]$ seuraaja saadaan vastaavasti: tällöin $i = 3$ ja $j = 5$, ja vaiheet (c) ja (d) tuottavat listat $[2, 1, 5, 6, 4, 3]$ ja $[2, 1, 5, 3, 4, 6]$.

   Permutaatiolle $[2, 1, 5, 3, 4, 6]$ saadaan $i = 5$, $j = 6$, ja vaiheet (c) ja (d) ovat $[2, 1, 5, 3, 6, 4]$ ja $[2, 1, 5, 3, 6, 4]$.

2. Trotter-Johnson minimimuutosjärjestyksessä permutaation $\pi = [2, 1, 4, 6, 3, 5]$ seuraaja saadaan määrittämällä permutaation $\pi' = [2, 1, 4, 3, 5]$ pariteetti. Tehdään tämä permutaation π' sykliesityksen $(1\ 2)(3\ 4)(5)$ perusteella (ks. tehtävä 4). Huomataan, että permutaatio π' koostuu kahdesta transpositiosta (ja yhdestä triviaalisyklistä) ja on siten parillinen, koska sen muodostamiseen tarvitaan parillinen määrä transpositioita. Parillisen permutaation tapauksessa alkio 6 ` `siirtyy vasemmalle" seuraajassa (mikäli mahdollista), ts. π:n seuraajat ovat $[2, 1, 6, 4, 3, 5]$, $[2, 6, 1, 4, 3, 5]$ ja $[6, 2, 1, 4, 3, 5]$.

   Vaikka tehtävässä ei tätä vaadittu, määritetään vielä esimerkin vuoksi permutaation $[6, 2, 1, 4, 3, 5]$ seuraaja. Tässä tapauksessa (6 on vasemmassa laidassa ja π' on parillinen) seuraaja muodostetaan muuttamalla permutaatio π' seuraajakseen. Määritetään siis permutaation $\pi'' = [2, 1, 4, 3]$ pariteetti, jotta saataisiin permutaation π' seuraaja määritetyksi. Permutaation sykliesitys on $(1\ 2)(3\ 4)$, joten se on parillinen. Parillisuuden perusteella permutaation π' seuraajassa alkio 5 siirtyy vasemmalle, ja seuraaja on siten $[2, 1, 4, 5, 3]$. Näin ollen permutaation $[6, 2, 1, 4, 3, 5]$ seuraaja on $[6, 2, 1, 4, 5, 3]$.

3. (Alkuperäisessä tehtävänannossa oli pieni lipsahdus; tapaus $n = 1$ ei ole mielekäs.)

   Väite. Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku ja r kokonaisluku väliltä $0 \leq r \leq n! - 1$. Tällöin r voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa
   $$r = \sum_{i=1}^{n-1} d_i \cdot i!,$$
   missä $0 \leq d_i \leq i$ kaikille $i = 1, \ldots, n-1$.

Todistus. (yksikäsitteisyys) Oletetaan, että luvulla r on kaksi ehdot täyttävää esitystä $(d_1, \ldots, d_{n-1})$ ja $(d'_1, \ldots, d'_{n-1})$. Tällöin on selvästi

$$r - r = \sum_{i=1}^{n-1} d_i \cdot i! - \sum_{i=1}^{n-1} d'_i \cdot i! = \sum_{i=1}^{n-1} (d_i - d'_i) i! = 0.$$

Oletetaan nyt, että esitykset poikkeavat toisistaan. Tällöin joukko $\{i \in \{1, \ldots n-1\} : d_i \neq d'_i\}$ ei ole tyhjä, ja siten sillä on suurin alkio k. Nyt nähdään suoraan, että ei voi olla $k = 1$, koska tällöin olisi $r - r = d_1 - d'_1 \neq 0$, mikä on ristiriita. Oletetaan siis $k > 1$. Lisäksi yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa $d_k > d'_k$. Nyt k:n määritelmän perusteella saadaan

$$r - r = \sum_{i=1}^{k} (d_i - d'_i) i! = (d_k - d'_k) k! + \sum_{i=1}^{k-1} (d_i - d'_i) i!.$$

Lukujen d_i ja d'_i rajoituksien perusteella on oltava $-i \leq d_i - d'_i \leq i$, ts. $|d_i - d'_i| \leq i$. Kolmioepäyhtälön $|x + y| \leq |x| + |y|$ ja edellisen avulla saadaan

$$|\sum_{i=1}^{k-1} (d_i - d'_i) i!| \leq \sum_{i=1}^{k-1} |d_i - d'_i| i! \leq \sum_{i=1}^{k-1} i \cdot i!.$$

Epäyhtälön oikealle puolelle voidaan todistaa induktiolla (ei kuitenkaan tässä; todistus on suoraviivainen), että kaikilla $k \geq 2$ pätee $\sum_{i=1}^{k-1} i \cdot i! = k! - 1$. Näin ollen saadaan kolmioepäyhtälön $|x + y| \geq ||x| - |y||$ avulla

$$|(d_k - d'_k) k! + \sum_{i=1}^{k-1} (d_i - d'_i) i!| \geq |k! - |\sum_{i=1}^{k-1} (d_i - d'_i) i!|| \geq |k! - (k! - 1)| > 0,$$

mikä on ristiriita.

(olemassaolo) Tapauksessa $n = 2$ olemassaolo on ilmeinen. Oletetaan siis, että tapauksessa $n - 1 \geq 1$ kaikille $0 \leq r \leq (n-1)! - 1$ on olemassa jokin esitys, ja valitaan mielivaltainen kokonaisluku r väliltä $0 \leq r \leq n! - 1$. Jos $r \leq (n-1)! - 1$, voidaan selvästi valita $d_{n-1} = 0$ ja loput esityksestä saadaan oletuksen perusteella. Toisaalta jos $(n-1)! \leq r \leq n! - 1$, valitaan d_{n-1} siten, että se on joukon $\{s \in \{1, \ldots, n-1\} : r - (n-1)! s \geq 0\}$ suurin alkio (joukko on selvästi ei-tyhjä, koska $r \geq (n-1)!$). Nyt on oltava $0 \leq r - d_{n-1}(n-1)! \leq (n-1)! - 1$, sillä jos olisi $r - d_{n-1}(n-1)! \geq (n-1)!$, ei d_{n-1} olisi suurin alkio em. joukossa, koska tapauksessa $d_{n-1} = n - 1$ edellinen epäyhtälö ei ole mahdollinen ($r - (n-1)(n-1)! < n! - (n-1)(n-1)! = (n-1)!$). Näin ollen oletuksen perusteella luvulle $r - d_{n-1}(n-1)!$ on olemassa esitys, ts. $r - d_{n-1}(n-1)! = \sum_{i=1}^{n-2} d_i i!$, josta selvästi saadaan luvulle r vaaditut ehdot täyttävä esitys. $\square$

4. Jokainen joukon $\{1, \ldots, n\}$ permutaatio π voidaan esittää järjestystä vaille yksikäsitteisesti pistevieraiden (eri sykleillä ei esiinny samaa pistettä) syklien tulona

$$\pi = (a_{1,1}\ a_{1,2}\ a_{1,3}\ \cdots\ a_{1,m_1}) \cdots (a_{k,1}\ a_{k,2}\ a_{k,3}\ \cdots\ a_{k,m_k}),$$

missä $k \geq 1$ ja $m_j \geq 1$ kaikilla $j = 1, \ldots, k$. Mielivaltainen ei-triviaali ($m_j \geq 2$) sykli $(a_{j,1} \ \cdots \ a_{j,m_j})$ voidaan selvästi esittää $m_j - 1$:n transposition avulla:

$$(a_{j,1} \ \cdots \ a_{j,m_j}) = (a_{j,1}, a_{j,2})(a_{j,2}, a_{j,3}) \cdots (a_{j,m_j-2}, a_{j,m_j-1})(a_{j,m_j-1}, a_{j,m_j}).$$

Nyt koko permutaatio π voidaan esittää $\sum_{j=1}^{k}(m_j - 1)$ transposition tulona, koska jokainen sykli voidaan esittää transpositioina kuten edellä, ja nämä esitykset yhdistää: syklit eivät vaikuta toisiinsa, koska ne ovat pistevieraita.

Määritellään nyt mielivaltaiselle joukon $\{1, \ldots, n\}$ permutaatiolle π

$$\lambda(\pi) = \sum_{j=1}^{k}(m_j - 1),$$

missä k on permutaation π pistevieraiden syklien lukumäärä, ja $m_1, \ldots, m_k$ näiden syklien pituudet. Kuvaus λ on hyvin määritelty, koska arvo $\lambda(\pi)$ ei riipu syklien esitysjärjestyksestä. Tarkastellaan seuraavaksi miten mielivaltaisen transposition (x, y), ($x, y \in \{1, \ldots, n\}$, $x \neq y$) lisääminen permutaatioon π vaikuttaa funktion λ arvoon. Tarkastelu jakaantuu kahteen tapaukseen:

(a) x ja y kuuluvat samaan permutaation π sykliin $(a_{j,1} \ \cdots \ a_{j,m_j})$, ts. $x = a_{j,p}$ ja $y = a_{j,q}$ joillakin $p < q$. (Oletetaan syklin alkiot näin numeroiduiksi.) Tällöin sykli $(a_{j,1} \ \cdots \ a_{j,m_j})$ jakaantuu permutaatiossa $(x, y)\pi$ kahdeksi pistevieraaksi sykliksi $(a_{j,1} \ \cdots \ a_{j,p-1} \ a_{j,q} \ \cdots \ a_{j,m_j})$ ja $(a_{j,p} \ \cdots \ a_{j,q-1})$; muut π:n syklit säilyvät muuttumattomina. Näin ollen $\lambda((x, y)\pi) = \lambda(\pi) - (m_j - 1) + m_j - (q - p) - 1 + q - p - 1 = \lambda(\pi) - 1$, koska ensimmäisen uuden syklin pituus on $m_j - (q - p)$ ja toisen $q - p$.

(b) x ja y kuuluvat eri sykleihin $(a_{j,1} \ \cdots \ a_{j,m_j})$ ja $(a_{l,1} \ \cdots \ a_{l,m_l})$. Oletetaan syklien alkiot numeroiduksi siten, että $x = a_{j,1}$ ja $y = a_{l,1}$. Tällöin em. syklien tilalla on permutaatiossa $(x, y)\pi$ sykli $(a_{j,1} \ \cdots \ a_{j,m_j} \ a_{l,1} \ \cdots \ a_{l,m_l})$, ja muut syklit säilyvät muuttumattomina, joten $\lambda((x, y)\pi) = \lambda(\pi) + 1$.

Yleisessä tapauksessa saadaan siis $\lambda((x, y)\pi) \equiv \lambda(\pi) + 1 \pmod 2$ riippumatta permutaatiosta π ja transpositiosta (x, y). Näin ollen jos mielivaltainen joukon $\{1, \ldots, n\}$ permutaatio τ esitetään kahdella tavalla transpositioiden $\tau = (x_1, y_1) \cdots (x_m, y_m)$ ja $\tau = (x'_1, y'_1) \cdots (x'_{m'}, y'_{m'})$ tulona, on oltava

$$m \equiv m - 1 + \lambda((x_m, y_m)) \equiv \cdots \equiv \lambda(\tau) \equiv \cdots \equiv m' \pmod 2,$$

joten molemmat m ja m' ovat joko parittomia tai parillisia.