Laskuharjoitus 2

25.01.2001

1. Kirjan tehtävä 2.4: Etsi vektorin 01010110 successor ja rank Gray-koodissa G^8

2. Mikä on 1000. kolmen alkion joukko colex-järjestyksessä? (vrt. kirjan tehtävä 2.5).

3. Olkoon $S = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Mikä on osajoukon $\{3, 7, 13\}$ sijaluku joukon S kolmialkioisten osajoukkojen lex-järjestyksessä?

4. Kirjan tehtävä 2.9: Olkoon $1 \leq k \leq n$. Poistetaan peilatusta binääri-Gray-koodista (binary reflected Gray code) G^n kaikki koodisanat joiden Hamming-paino ei ole k. Osoita, että jäljelle jäävät koodisanat muodostavat n-joukon k-osajoukkojen minimimuutosjärjestyksen.

Laskuharjoituksen 2 vastaukset

1. Kirjoitetaan $r = (b_8 b_7 \ldots b_0)_2$ ja $G_r^n = 01010110 = (a_7 a_6 \ldots a_0)_2$. Kirjan lemman 2.3 mukaan

$$a_j \equiv (b_j + b_{j+1}) \bmod 2$$

ja

$$b_j \equiv \sum_{i=j}^{n-1} a_i \bmod 2.$$

Tästä laskemalla saadaan, että $\text{rank}\,(01010110) = 1100100_2 = 100$. Seuraajan rank on $1100101_2 = 101$, ja $\text{unrank}\,(1100101_2) = 01010111$.
(Ks. myös kirjan algoritmi 2.3.)

2. Ks. kirjan algoritmi 2.10. Jos ensimmäisen osajoukon rank on 0, on 1000. osajoukon rank 999. Asetetaan $r \leftarrow 999$. Haetaan ensin suurin x, jolle $\binom{x}{k} \leq r$, eli tässä tapauksessa 19. Kaikissa $\binom{19}{3} = 969$ ensimmäisessä osajoukossa suurin luku on korkeintaan 19. $\binom{20}{3} = 1140$, joten 20 on eräs haettavan kolmen alkion osajoukon alkio. Uusi arvo r:lle: $r \leftarrow 999 - \binom{19}{3} = 30$. Suurin x jolle $\binom{x}{2} \leq 30$ on 8, joten toinen osajoukon alkio on $8 + 1 = 9$. Uusi arvo r:lle: $r \leftarrow 30 - \binom{8}{2} = 2$, joten viimeinen osajoukon alkio on $2 + 1 = 3$. Kolmen alkion osajoukko, jonka rank on 999, on siis $\{3, 9, 20\}$.

3. Oletetaan joukon S alkiot järjestetyksi kuten tavallisesti. Tehtävä voidaan ratkaista muuntamalla ongelma joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ vastaavaksi ongelmaksi ja käyttämällä tälle joukolle soveltuvaa kirjan algoritmia 2.8, tai kirjan lausetta 2.4 ja algoritmia 2.9. Muunnos voidaan tehdä kuvauksella
$f : S \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, joka säilyttää järjestyksen, ts. kaikilla $x, y \in S$ pätee $x < y$ jos ja vain jos $f(x) < f(y)$; ainoa tällainen kuvaus saadaan asettamalla $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(5) = 3$, $f(7) = 4$, $f(11) = 5$, $f(13) = 6$. Kuvauksen f avulla joukko $\{3, 7, 13\} \subset S$ muuntuu joukoksi $f(\{3, 7, 13\}) = \{2, 4, 6\}$. (Järjestyksen säilyvyysominaisuuden avulla voidaan osoittaa, että joukon $\{2, 4, 6\}$ lex-rank joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 3-osajoukkojen joukossa vastaa joukon $\{3, 7, 13\}$ lex-rank'ia joukon S 3-osajoukkojen joukossa.) Määritetään joukon $\{2, 4, 6\}$ lex-rank kirjan lauseen 2.4 ja algoritmin 2.9 (colex-rank) avulla. Lauseen 2.4 mukaan joukon $\{1, \ldots, n\}$ k-osajoukon T lex-rank voidaan määrittää k-osajoukon $T' = \{n + 1 - i : i \in T\}$ colex-rankin avulla seuraavasti:

$$\text{rank}_{\text{lex}}(T) = \binom{n}{k} - 1 - \text{rank}_{\text{colex}}(T').$$

Nyt $n = 6$ ja $k = 3$, $T = \{2, 4, 6\}$, $T = \{6+1-2, 6+1-4, 6+1-6\} = \{5, 3, 1\}$. Kirjan algoritmin 2.9 avulla saadaan

$$\text{rank}_{\text{colex}}(\{5,3,1\}) = \binom{5-1}{3} + \binom{3-1}{2} + \binom{1-1}{1} = 4 + 1 + 0 = 5,$$

joten lauseen 2.4 perusteella

$$\text{rank}_{\text{lex}}(\{2,4,6\}) = \binom{6}{3} - 1 - 5 = 20 - 1 - 5 = 14.$$

4. Merkitään n-mittaisten peilatun binääri-Gray-koodin koodisanojen jonoa G^n:llä, ja vastaavaa käänteisessä järjestyksessä listattua jonoa $\overline{\mathsf{G}^n}$:llä. Nyt $(n+1)$-mittaisista koodisanoista koostuvaa peilattua binääri-Gray-koodia voidaan merkitä $\mathsf{G}^{n+1} = (0\mathsf{G}^n, 1\overline{\mathsf{G}^n})$.

   Koska G^n koostuu kaikista 2^n binäärikoodisanasta joiden pituus on n, on selvää, että G^n sisältää myös kaikki ne $\binom{n}{k}$ binäärikoodisanaa, joiden pituus on n ja joissa on täsmälleen k ykkösbittiä, ts., joiden Hamming-paino on k. Merkitään jonon G^n alijonoa, joka koostuu k-painoisista koodisanoista G^n_k:lla.

   Jono $\mathsf{G}^n_k = (x_1, \ldots, x_{\binom{n}{k}})$ on k-osajoukkojen minimimuutosjärjestys jos jonon peräkkäisten koodisanojen välinen Hamming-etäisyys (niiden koordinaattien lukumäärä, jossa koodisanat poikkeavat toisistaan) on aina 2, ts. $d_H(x_j, x_{j+1}) = 2$ kaikilla $j = 1, \ldots, \binom{n}{k} - 1$.

   Väite. Olkoon $n \geq 1$. Tällöin kaikilla $1 \leq k \leq n$ jono G^n_k on n-joukon k-osajoukkojen minimimuutosjärjestys.

   Todistus. Tapauksissa $k = n$ väite on selvästi tosi, koska jonossa G^n_n on vain yksi koodisana. Tapauksessa $k = 1$ jono G^n_1 koostuu koodisanoista $(10\cdots0, 010\cdots0, 0010\cdots0, \ldots, 0\cdots01)$ (ei tässä järjestyksessä), joita on n kpl. On selvää, että minkä tahansa kahden tätä muotoa olevan koodisanan Hamming-etäisyys on 2.

   Jatketaan induktiolla n:n suhteen. Tapaukset $n = 1, 2$ ovat tosia edellisten erikoistapauksien nojalla ja muodostavat siten induktion perustapauksen. Oletetaan, että väite pätee tapauksessa n ja kaikilla $1 \leq k \leq n$. Tarkastellaan jonoa G^{n+1} ja valitaan jokin k, $(2 \leq k \leq n)$. (Tapaukset $k = 1$ ja $k = n+1$ ovat tosia aikaisemman perusteella.) Jonon G^{n+1} määritelmän $\mathsf{G}^{n+1} = (0\mathsf{G}^n, 1\overline{\mathsf{G}^n})$ perusteella sen kaikkien k-painoisten koodisanojen alijono $\mathsf{G}^{n+1}_k = (x_1, \ldots, x_{\binom{n+1}{k}})$ voidaan jakaa peräkkäisiin alijonoihin $(x_1, \ldots, x_m)$ ja $(x_{m+1}, \ldots, x_{\binom{n+1}{k}})$ siten, että jonossa $(x_1, \ldots, x_m)$ ovat kaikki sellaiset koodisanat, joiden ensimmäinen koordinaatti on 0 ja jälkimmäisessä jonossa kaikki sellaiset koodisanat joiden ensimmäinen koordinaatti on 1. Jono $(x_1, \ldots, x_m)$ on siis jonon $0\mathsf{G}^n$ alijono, joka koostuu k-painoisista koodisanoista, ja $(x_{m+1}, \ldots, x_{\binom{n+1}{k}})$ jonon $1\overline{\mathsf{G}^n}$ alijono, joka koostuu koodisanoista, joiden n:n viimeisen koordinaatin paino on $k-1$. Näin ollen on oltava $(x_1, \ldots, x_m) = 0\mathsf{G}^n_k$ ja $(x_{m+1}, \ldots, x_{\binom{n+1}{k}}) = 1\overline{\mathsf{G}^n_{k-1}}$, missä $\overline{\mathsf{G}^n_{k-1}}$ tarkoittaa jonoa G^n_{k-1} käänteisessä järjestyksessä. Induktiooletuksen perusteella saadaan siis $d_H(x_j, x_{j+1}) = 2$ kaikilla $j = 1, \ldots, m-1$ ja toisaalta $d_H(x_{j+1}, x_j) = d_H(x_j, x_{j+1}) = 2$ kaikilla $j = m+1, \ldots, \binom{n+1}{k} - 1$.

Jäljelle jää tapaus $j = m$. Koska x_m on jonon $0\mathsf{G}_k^n$ viimeinen koodisana ja toisaalta x_{m+1} on jonon $1\mathsf{G}_{k-1}^n$ viimeinen koodisana, tapauksessa $j = m$ pätee $d_H(x_j, x_{j+1}) = 2$ seuraavan aputuloksen nojalla:

Lemma. Olkoon $n \geq 1$. Tällöin jonolle G^n pätee kaikilla $1 \leq k \leq n$:

(a) ensimmäisen k-painoisen koodisanan ja ensimmäisen $(k-1)$-painoisen koodisanan välinen Hamming-etäisyys on 1; ja

(b) viimeisen k-painoisen koodisanan ja viimeisen $(k-1)$-painoisen koodisanan välinen Hamming-etäisyys on 1.

Todistus. Tapauksessa $k = 1$ G^n sisältää vain yhden koodisanan, jonka paino on $k - 1 = 0$, ts. $00 \cdots 0$. On selvää, että kaikki 1-painoiset koodisanat ovat tästä koodisanasta Hamming-etäisyydellä 1. Tapaus $k = n$ on vastaavanlainen. Näin ollen jäljelle jäävät tapaukset $2 \leq k \leq n - 1$. Edetään induktiolla n:n suhteen kuten edellä; tapaukset $n = 1, 2$ ovat tosia em. erikoistapauksien perusteella. Oletetaan, että väite pätee tapauksessa n (ja kaikilla $1 \leq k \leq n$). Tarkastellaan jonoa G^{n+1} ja valitaan jokin k, $(2 \leq k \leq n)$. Jonon G^{n+1} määritelmän $\mathsf{G}^{n+1} = (0\mathsf{G}^n, 1\overline{\mathsf{G}^n})$ ja k:n valinnan perusteella huomataan, että ensimmäinen k-painoinen koodisana y_k ja $(k-1)$-painoinen koodisana y_{k-1} löytyvät osajonosta $0\mathsf{G}^n$. Koska koodisanojen y_k ja y_{k-1} ensimmäisen koordinaatin nolla ei vaikuta niiden painoon, on induktio-oletuksen perusteella $d_H(y_k, y_{k-1}) = 1$. Vastaavasti viimeinen k-painoinen koodisana z_k ja viimeinen $(k-1)$-painoinen koodisana z_{k-1} löytyvät osajonosta $1\overline{\mathsf{G}^n}$, ts., z_k vastaa jonon $1\mathsf{G}^n$ ensimmäistä k-painoista koodisanaa ja z_{k-1} ensimmäistä $(k-1)$-painoista koodisanaa. Nyt on oltava $z_k = 1z'_{k-1}$ ja $z_{k-1} = 1z'_{k-2}$, missä z'_{k-1} on jonon G^n ensimmäinen $(k-1)$-painoinen koodisana ja z'_{k-2} ensimmäinen $(k-2)$-painoinen koodisana. Jälleen voidaan käyttää induktio-oletusta (arvolla $k - 1 \geq 1$), jolloin saadaan $d_H(z'_k, z'_{k-1}) = d_H(z_k, z_{k-1}) = 1$. □