Kotitehtävä 3

Kolmannessa kotitehtävässä etsitään virheenkorjaavia vakiopainobinäärikoodeja, joissa on mahdollisimman monta koodisanaa.

Koodisana on järjestetty lista bittejä. Koodisanan *pituus* on sen bittien lukumäärä. Koodisanan *paino* on sen 1-bittien lukumäärä. Kahden koodisanan *Hamming-etäisyys* on niiden positioiden lukumäärä, joissa koodisanat eroavat toisistaan.

Virheenkorjaava (n, d)-koodi, missä n on koodin *pituus* ja d koodin *minimietäisyys*, on joukko koodisanoja, joiden pituus on n, ja kaikkien koodisanaparien Hamming-etäisyys on vähintään d. Vakiopainokoodit ovat virheenkorjaavien koodien erikoistapaus. (n, d, w)-vakiopainokoodi on virheenkorjaava (n, d)-koodi, jossa jokaisen koodisanan paino on w.

Olkoon $A(n, d, w)$ on suurin mahdollinen koodisanojen lukumäärä (n, d, w)-vakiopainokoodissa. Tällaisia (n, d, w)-vakiopainokoodeja sanotaan *optimaalisiksi*. Kotitehtävässä määritellään $A(n, d, w)$:lle täsmällisiä arvoja ja alarajoja esittämällä vakiopainokoodien konstruointiongelma klikkiongelmana.

Muunnos klikkiongelmaksi

Optimaalisten vakiopainokoodien konstruointiongelman voi esittää suurimman klikin etsimisenä graafista seuraavasti. Muodostetaan graafi, jonka solmut koostuvat kaikista n bitin koodisanoista, joiden paino on w. Kahden solmun välillä on kaari jos ja vain jos solmut voivat kuulua samaan vakiopainokoodiin; toisin sanoen, jos vastaavien koodisanojen Hamming-etäisyys on vähintään d. Syntyneen graafin klikit vastaavat nyt (n, d, w)-vakiopainokoodeja; erityisesti suurimmat graafin klikit ovat kokoa $A(n, d, w)$ ja vastaavat optimaalisia koodeja.

Symmetrioiden käyttö

Kun graafin koko kasvaa suureksi, käy työlääksi etsiä sen suurin klikki. Tällöin voidaan rajoittua tarkastelemaan vakiopainokoodeja, joilla on tiettyjä automorfismeja.

Automorfismien esittämiseksi tarkastellaan vakiopainokoodeja nyt joukkojärjestelmänä. Joukkojärjestelmän lohkot B_i vastaavat koodisanoja: lohko on niiden positioiden joukko, joissa vastaavassa koodisanassa on ykkönen. Näin saadaan joukkojärjestelmä $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, missä $\mathcal{X} = \{1, \ldots, n\}$ ja $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_k\}$, missä $B_i \subseteq \mathcal{X}$ ja $|B_i| = w$. Minimietäisyysehto voidaan esittää muodossa $|(B_i \setminus B_j) \cup (B_j \setminus B_i)| \geq d$, kun $0 < i < j \leq k$.

Nyt voidaan vaatia, että joukon $\mathcal{X}$ permutaatio $\pi = (1, 2, \ldots, n)$ on joukkojärjestelmän automorfismi (ks. kirjan määritelmä 6.4). Tässä tapauksessa joukkojärjestelmän on oltava yhdiste permutaation π generoiman *syklisen ryhmän* C_n radoista joukon $\mathcal{X}$ w-osajoukkojen joukossa. Lisäksi huomataan, että jotkut radat eivät kelpaa joukkojärjestelmän osiksi, koska ne sisältävät kaksi joukkoa, jotka eivät täytä minimietäisyysehtoa.

Kun minimietäisyysehdon täyttävät C_n-radat on konstruoitu, ongelma voidaan esittää painoltaan suurimman klikin etsimisenä painotetusta graafista. *Painotetussa graafissa* jokaisella solmulla on paino, ja painoltaan suurin klikki on klikki, jonka solmujen painojen summa on suurin. Graafin solmut koostuvat kaikista minimietäisyysehdon täyttävistä radoista, ja kunkin solmun paino on vastaavan radan pituus. Kahden solmun välillä on kaari jos ja vain jos molempien ratojen koodisanat voidaan sisällyttää koodiin rikkomatta etäisyysehtoa. Nyt painoltaan suurimman klikin paino vastaa suurimman vakiopainokoodin kokoa, jolla on automorfismina π.

Osoitteesta `http://www.tcs.hut.fi/~pat/wclique.html` löytyy ohjelma, jolla voi etsiä annetusta graafista sen painoltaan suurimman klikin.

Tehtävä

1. Rajoittamatta hakua symmetrioin: etsi $A(n,d,w)$, kun $d = 4$, $w = 3$. Aloita haku esimerkiksi arvosta $n = 6$ ja kasvata koodin pituutta, kunnes laskenta vie liikaa aikaa.

2. Kun laskenta alkaa viedä liikaa aikaa, rajoita tarkastelu koodeihin, joilla on ylläkuvatunlainen syklinen automorfismi. Jos löytämässäsi koodissa on k koodisanaa, saat alarajan $A(n,d,w) \geq k$ — koska on olemassa (n,d,w)-vakiopainokoodi, jossa on k koodisanaa, parhaan (n,d,w)-vakiopainokoodin koko $A(n,d,w)$ on varmasti ainakin k. Vertaa saamiasi alarajoja oheisen taulukon arvoihin.

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$A(n,4,3)$	17	20	26	28	35	37	44	48	57	60

n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$A(n,4,3)$	70	73	83	88	100	104	117	121	134	140

Taulukko 6: $A(n,4,3)$, kun $11 \leq n \leq 30$

Palautusohje

Palautukseen tulee sisältyä ratkaisun sanallinen kuvaus, ohjelmien lähdekoodit ja yhteenveto löydetyistä $A(n,d,w)$:n arvoista ja alarajoista.

Palautus: Palautus assistentille (Petteri Kaski, Petteri.Kaski@hut.fi, TB358). Kotitehtävän voi palauttaa myös sähköpostitse esim. tekstinä tai hyvälaatuisena Postscriptinä. Viimeinen palautuspäivä on torstai 19.4.2001.