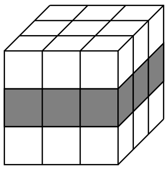
Kotitehtävä 3

Kolmannessa kotitehtävässä tutkitaan Rubikin kuutiota käyttäen hyväksi permutaatioryhmien käsittelyyn kehitettyjä algoritmeja.

Väritetään Rubikin kuution 54 pikkuneliötä mustalla ja valkoisella kuten oheisessa kuvassa.



			0	1	2						
			3	4	5						
			6	7	8						
9	10	11	18	19	20	27	28	29	36	37	38
12	13	14	21	22	23	30	31	32	39	40	41
15	16	17	24	25	26	33	34	35	42	43	44
			45	46	47						
			48	49	50						
			51	52	53						

Tehtävänä on määrittää, kuinka moneen erilaiseen tilaan kuvattu Rubikin kuutio voidaan saattaa siirtosarjoilla, jotka koostuvat koko kuution ja/tai sen sivutahkojen kierroista. (Kahta tilaa pidetään samoina, jos ne voidaan muuntaa toisikseen koko kuutiota kiertämällä.)

Tehtävän ratkaisua varten numeroidaan kuution 54 pikkuneliötä kuten kuvassa yllä. Tällöin kuution sallitut siirrot määräävät kukin joukon $X = \{0, 1, \ldots, 53\}$ permutaation, ja siirtosarjoja vastaavat permutaatiot saadaan siirtojen määräämien permutaatioiden yhdisteinä. Nämä permutaatiot muodostavat ryhmän G.

G:n virittävät esimerkiksi seuraavat kolme permutaatiota:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 =&(0,2,8,6)(1,5,7,3)(9,36,27,18)(10,37,28,19)(11,38,29,20)\\
&\cdots(12,39,30,21)(13,40,31,22)(14,41,32,23)(15,42,33,24)\\
&\cdots(16,43,34,25)(17,44,35,26)(45,51,53,47)(46,48,52,50)\\
\alpha_2 =&(0,18,45,44)(1,19,46,43)(2,20,47,42)(3,21,48,41)(4,22,49,40)\\
&\cdots(5,23,50,39)(6,24,51,38)(7,25,52,37)(8,26,53,36)\\
&\cdots(9,11,17,15)(10,14,16,12)(27,33,35,29)(28,30,34,32)\\
\beta =&(0,2,8,6)(1,5,7,3)(9,36,27,18)(10,37,28,19)(11,38,29,20)
\end{aligned}
$$

Permutaatiot α_1, α_2 vastaavat koko kuution kiertoa akselien $\{4, 49\}$ ja $\{13, 31\}$ ympäri, ja permutaatio β vastaa sivun $\{0, 1, \ldots, 8\}$ kiertoa.

(Käännä)

Tehtävät.

1. Määritä ryhmän G koko.
2. Olkoon $H \subseteq G$ permutaatioiden α_1, α_2 virittämä G:n aliryhmä. Mikä on tämän aliryhmän koko?
3. Olkoon $S = \{12, 13, 14, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 39, 40, 41\} \subset X$ mustiksi väritettyjen ruutujen joukko. Määritä radan $G(S) = \{g(S) \ : \ g \in G\}$ pituus $|G(S)|$.
4. Määritellään ekvivalenssirelaatio joukkoon $G(S)$ siten, että joukot $T, T' \in G(S)$ ovat ekvivalentteja, jos on olemassa $h \in H$ siten, että $h(T) = T'$. Kuinka monta ekvivalenssiluokkaa joukkoon $G(S)$ muodostuu, ja minkä kokoisia ne ovat?
5. Selvitä kohtien (3) ja (4) avulla kuinka moneen erilaiseen tilaan väritetty kuutio voidaan lopulta saattaa. Perustele vastauksesi.

Erityisen ansiokkaasta ratkaisusta voi saada bonuspisteen tenttiin.

Valmisohjelmat. Ongelman ratkaisussa kannattaa käyttää hyväksi jo olemassaolevia työkaluja. Pienimuotoinen permutaatioryhmien käsittelyyn soveltuva ohjelma löytyy osoitteesta

$\langle$`http://www.tcs.hut.fi/Teaching/T-79.161/group.c`$\rangle$.

Ohjelman tulisi kääntyä ainakin laskentakeskuksen koneissa esimerkiksi komennolla `gcc -O2 -Wall -o group group.c`. Huomattavasti monipuolisempi (mutta myös raskaampi) työkalu on esimerkiksi `GAP`, joka on saatavissa osoitteesta $\langle$`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~gap/`$\rangle$.

Palautus. Kotitehtävä on palautettava sähköpostitse assistentille (Petteri Kaski, `Petteri.Kaski@hut.fi`) viimeistään maanantaina 29.4.2002. Selostuksen voi palauttaa esimerkiksi hyvälaatuisena PostScriptinä. Selostuksen lisäksi palautuksessa on oltava liitteenä ongelman ratkaisuun käytetty oma lähdekoodi.