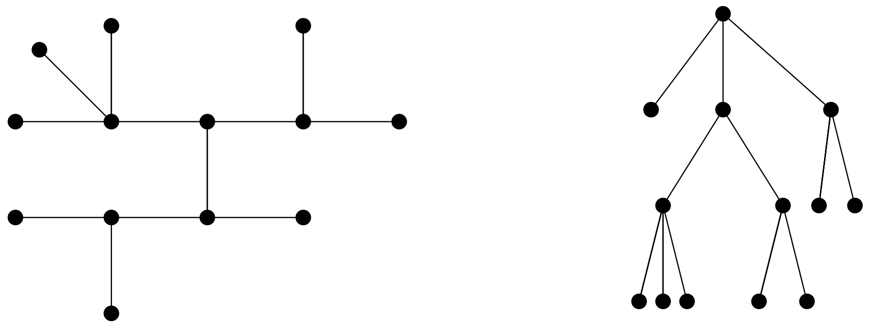
Laskuharjoitus 9

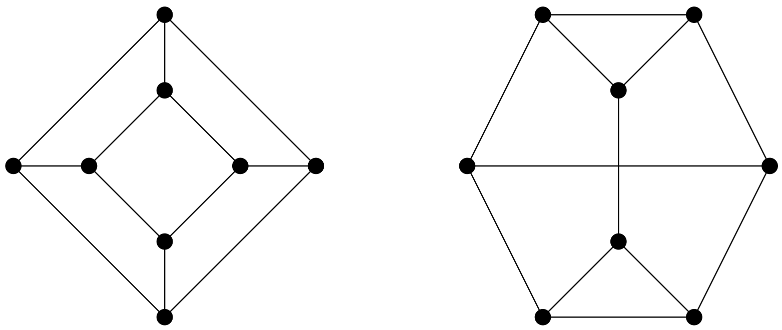
4.4.2002

1. Tutki ovatko oheiset puut isomorfisia laskemalla niille sertifikaatit.

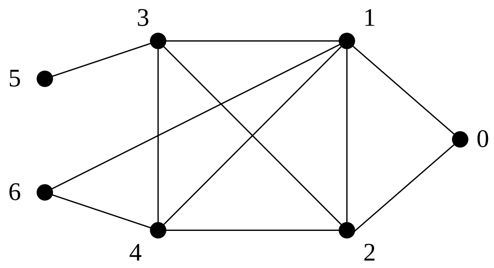


2. Muunna edellisen tehtävän tuloksena saatu sertifikaatti takaisin puuksi.

3. Osoita sopivan invariantin avulla, että allaolevat graafit eivät ole isomorfisia.



4. Osita allaolevan graafin solmujoukko solmujen astelukujen mukaan, ja muodosta osituksen karkein tasasuhtainen hienonnus (coarsest equitable refinement).



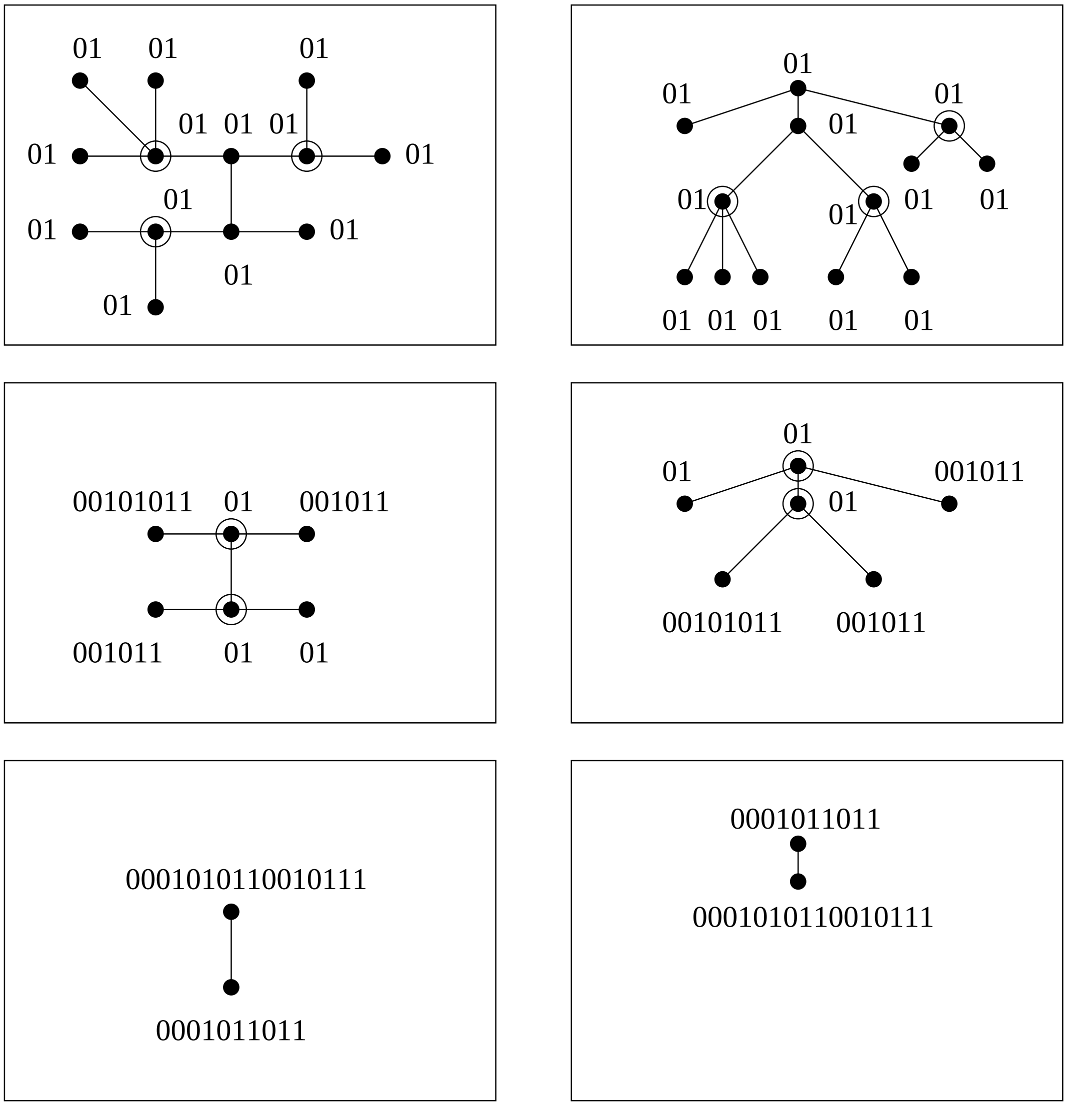
Laskuharjoituksen 9 vastaukset

Tehtävä 1

Käytetään kirjan kappaleessa 7.3.1. esitettyä algoritmia hieman tarkennettuna.

1. Nimeä puussa kaikki solmut 01:ksi.
2. Niin kauan kuin puussa on enemmän kuin kaksi solmua, toista seuraavaa.
   (a) Määritä kaikki ne ei-lehtisolmut, joilla on naapurina enintään yksi ei-lehtisolmu, ja aseta nämä solmut joukkoon T. (Puun solmu on lehtisolmu jos sillä on enintään yksi naapurisolmu.)
   (b) Tee kullekin $x \in T$ seuraavaa:
      i. Kerää joukkoon Y x:n naapurina olevien lehtisolmujen nimet sekä solmun x nimi, josta on poistettu alku-0 ja loppu-1.
      ii. Korvaa x:n nimi nimellä, joka saadaan järjestämällä Y:n alkiot leksikografiseen järjestykseen, liittämällä ne yhdeksi bittijonoksi, ja lisäämällä alkuun 0 ja loppuun 1.
      iii. Poista x:n naapurina olevat lehtisolmut.
3. Jos jäljellä on vain yksi solmu, sen nimi on puun sertifikaatti.
4. Jos jäljellä on kaksi solmua, niiden nimet leksikografisessa järjestyksessä yhteenliitettyinä muodostavat puun sertifikaatin.

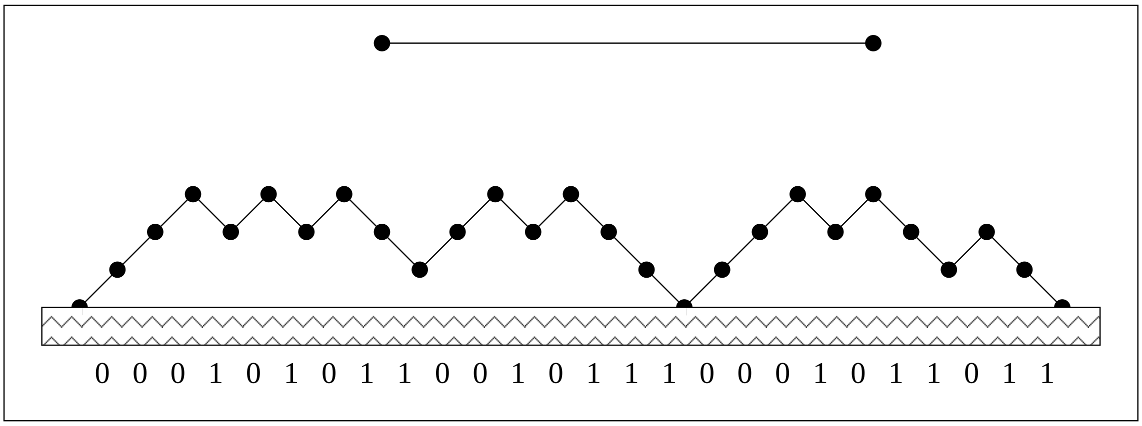
Algoritmin eteneminen tehtävässä annetuille puille on esitetty seuraavassa kuvassa. Ympyröidyt solmut ilmoittavat kulloinkin joukkoon T kuuluvat solmut.

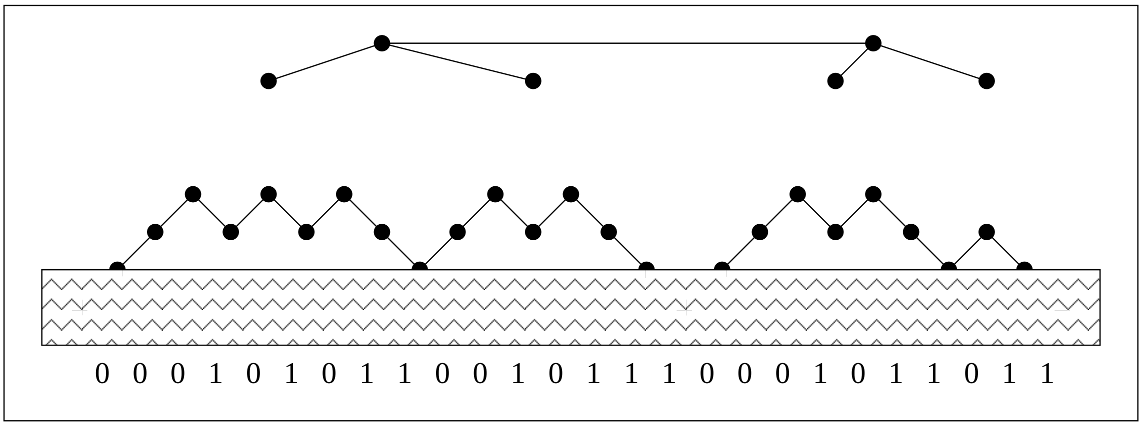


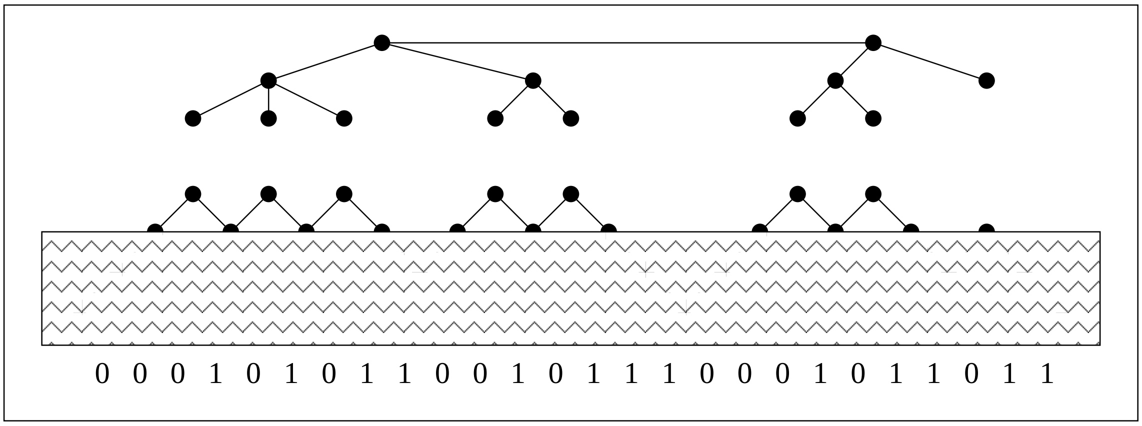
Tuloksena saadaan molemmille puille sama sertifikaatti, joten puut ovat isomorfiset.

Tehtävä 2

Käytetään kirjassa esitettyä nousevan veden algoritmia (s. 248–252). Algoritmin kulku on esitetty seuraavassa kuvassa.







Tehtävä 3

Graafit $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ ja $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ ovat *isomorfisia* (merkintä: $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$) jos on olemassa bijektio $\pi : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ siten, että kaikilla $u, v \in \mathcal{V}_1$ pätee $\{u, v\} \in \mathcal{E}_1$

jos ja vain jos $\{\pi(u), \pi(v)\} \in \mathcal{E}_2$. Bijektio π on *isomorfismi*.

Olkoon $\mathcal{F}$ perhe graafeja ja X jokin joukko. Kuvaus $\Phi : \mathcal{F} \to X$ on *invariantti* perheelle $\mathcal{F}$ jos kaikille $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathcal{F}$ pätee $\Phi(\mathcal{G}_1) = \Phi(\mathcal{G}_2)$ aina kun $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$. Näin ollen jos $\Phi(\mathcal{G}_1) \neq \Phi(\mathcal{G}_2)$ niin on oltava $\mathcal{G}_1 \ncong \mathcal{G}_2$.

Tehtävän ratkaisemiseksi riittää siis löytää invariantti, joka erottelee annetut graafit toisistaan. Tällainen on esimerkiksi kolmioiden lukumäärä graafissa: isomorfismin π on kuvattava mielivaltainen kolmio $\{\{u, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}\} \subseteq \mathcal{E}_1$ vastaavalle kolmiolle $\{\{\pi(u), \pi(v)\}, \{\pi(u), \pi(w)\}, \{\pi(v), \pi(w)\}\} \subseteq \mathcal{E}_2$, joten isomorfisissa graafeissa $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ on oltava sama lukumäärä kolmioita. Nyt huomataan, että vasemmanpuoleisessa graafissa ei ole yhtään kolmiota, ja oikeanpuoleisessa graafissa on kaksi kolmiota. Näin ollen graafit eivät voi olla isomorfiset.

Tehtävä 4

Olkoon $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tarkasteltava graafi. Merkitään solmun $v \in \mathcal{V}$ naapurisolmujen joukkoa $N_{\mathcal{G}}(v)$:llä. Määritellään osajoukolle $T \subseteq \mathcal{V}$:

$$D_T(v) = |N_{\mathcal{G}}(v) \cap T|,$$

ts. $D_T(v)$ on solmun v joukossa T olevien naapurisolmujen lukumäärä.

Solmujoukon $\mathcal{V}$ ositus

$$B = [B[0], B[1], \ldots, B[|B| - 1]]$$

on *tasasuhtainen* (equitable) jos kaikilla $i, j \in \{0, 1, \ldots, |B|-1\}$ pätee $D_{B[j]}(u) = D_{B[j]}(v)$ kaikilla $u, v \in B[i]$.

Järjestetty ositus B on järjestettyä ositusta A *hienompi* jos

- jokaiselle osajoukolle $B[i]$ on olemassa osajoukko $A[j]$ siten, että $B[i] \subseteq A[j]$; ja
- jos $u \in A[i_1]$ ja $v \in A[j_1]$, missä $i_1 < j_1$, niin tällöin $u \in B[i_2]$, $v \in B[j_2]$, missä $i_2 < j_2$.

Kääntäen vastaavassa tilanteessa voidaan sanoa, että A on B:tä *karkeampi* ositus. B on aidosti hienompi (aidosti karkeampi) kuin A jos B on A:ta hienompi (karkeampi) ja lisäksi pätee $A \neq B$.

Olkoon A graafin solmujoukon järjestetty ositus. Ositukselle A on olemassa (osituksen komponenttien järjestystä vaille) yksikäsitteinen karkein tasasuhtainen ositus B, joka on hienompi kuin A. Allaoleva algoritmi löytää (erään) järjestetyn karkeimman tasasuhtaisen osituksen B, joka on hienompi kuin A.

1. Aseta $B = A$.

2. Tallenna B:n osajoukot järjestyksessä pinoon $\mathcal{S}$.
3. Toista kunnes $\mathcal{S} = \emptyset$:
   (a) Poista osajoukko T pinon $\mathcal{S}$ päältä.
   (b) Toista kaikille B:n osajoukoille $B[i]$:
      i. Aseta $L[h] = \{v \in B[i] \ : \ D_T(v) = h\}$ kaikilla $h = 0, 1, \ldots, |\mathcal{V}| - 1$.
      ii. Jos L sisältää enemmän kuin yhden ei-tyhjän joukon, korvaa $B[i]$ ei-tyhjillä joukoilla $L[0], L[1], L[2], \ldots,$ ja tallenna ko. ei-tyhjät joukot pinoon $\mathcal{S}$.

Tehtävän graafin solmujen asteluvut ovat

Solmu	0	1	2	3	4	5	6
Asteluku	2	5	4	4	4	1	2

.

Ositetaan solmut kasvavan asteluvun mukaiseen järjestykseen

$$A = [\{5\}, \{0, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{1\}].$$

Suoritetaan annettua algoritmia askel kerrallaan. Alkutilassa

$$\begin{aligned} B &= [\{\overset{0}{5}\}, \{\overset{1}{0}, \overset{1}{6}\}, \{\overset{1}{2}, \overset{1}{3}, \overset{1}{4}\}, \{\overset{0}{1}\}] \\ \mathcal{S} &= [\{5\}, \{0, 6\}, \{2, 3, 4\}, \underbrace{\{1\}}_{=T}] \end{aligned}$$

(kunkin B:n solmun v yläpuolelle on merkitty vastaava arvo $D_T(v)$). Selvästi mikään osituksen komponentti ei jakaannu, koska $D_T(v)$ on vakio kaikissa komponenteissa. Tilanne on vastaava seuraavalla askelella:

$$\begin{aligned} B &= [\{\overset{1}{5}\}, \{\overset{1}{0}, \overset{1}{6}\}, \{\overset{2}{2}, \overset{2}{3}, \overset{2}{4}\}, \{\overset{3}{1}\}] \\ \mathcal{S} &= [\{5\}, \{0, 6\}, \underbrace{\{2, 3, 4\}}_{=T}]. \end{aligned}$$

Kolmannella askelella komponentti $\{2, 3, 4\}$ jakaantuu osiin $\{3\}$ ja $\{2, 4\}$:

$$\begin{aligned} B &= [\{\overset{0}{5}\}, \{\overset{0}{0}, \overset{0}{6}\}, \{\overset{1}{2}, \overset{0}{3}, \overset{1}{4}\}, \{\overset{2}{1}\}] \\ \mathcal{S} &= [\{5\}, \underbrace{\{0, 6\}}_{=T}]. \end{aligned}$$

Nyt ositus säilyy muuttumattomana pinon $\mathcal{S}$ tyhjentymiseen asti:

$$\begin{aligned}
B &= [\{\overset{0}{5}\}, \{\overset{1}{0}, \overset{1}{6}\}, \{\overset{2}{3}\}, \{\overset{1}{2}, \overset{1}{4}\}, \{\overset{2}{1}\}] \\
\mathcal{S} &= [\{5\}, \{3\}, \underbrace{\{2, 4\}}_{=T}].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= [\{\overset{1}{5}\}, \{\overset{0}{0}, \overset{0}{6}\}, \{\overset{0}{3}\}, \{\overset{1}{2}, \overset{1}{4}\}, \{\overset{1}{1}\}] \\
\mathcal{S} &= [\{5\}, \underbrace{\{3\}}_{=T}].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= [\{\overset{0}{5}\}, \{\overset{0}{0}, \overset{0}{6}\}, \{\overset{1}{3}\}, \{\overset{0}{2}, \overset{0}{4}\}, \{\overset{0}{1}\}] \\
\mathcal{S} &= [\underbrace{\{5\}}_{=T}].
\end{aligned}$$

Haluttu ositus on siis

$$B = [\{5\}, \{0, 6\}, \{3\}, \{2, 4\}, \{1\}].$$