Laskuharjoitus 8

21.3.2002

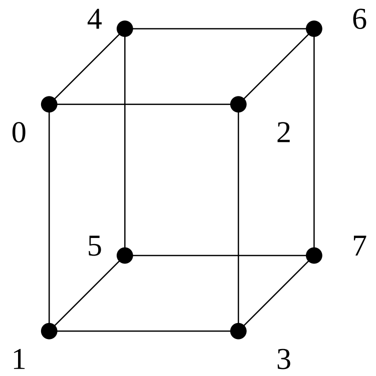
1. Neliö jaetaan 9 pikkuneliöön, joista osa väritetään mustiksi. Kaksi väritystä samaistetaan, jos toinen saadaan ensimmäisestä kiertämällä ja/tai peilaamalla koko neliötä.

0	1	2
3	4	5
6	7	8

   (a) Kuinka monella eri tavalla voidaan värittää 5 pikkuneliötä?

   (b) Anna kaikki kahdeksan erilaista 2 pikkuneliön väritystä.

2. Olkoon $\mathcal{G}$ oheinen graafi.



Määritä osajoukkojen $\{0, 7\}$ ja $\{0, 1, 2, 3\}$ radat ja stabiloija-aliryhmät ryhmän $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})$ suhteen. Määritä lisäksi molempien stabiloija-aliryhmien jokin vasen transversaali ryhmän $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})$ suhteen. (Ryhmän $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})$ alkiot on listattu kirjan taulukossa 6.1, ja Schreier-Sims esitys esimerkissä 6.7.)

Laskuharjoituksen 8 vastaukset

Tehtävä 1 (a)

Annetun neliön symmetriaryhmä G on isomorfinen dihedraaliryhmän D_8 kanssa. Ryhmän muodostavat permutaatiot

$$\begin{aligned} g_0 &= (0)(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8) \\ g_1 &= (0,2,8,6)(1,5,7,3)(4) \\ g_2 &= (0,8)(1,7)(2,6)(5,3)(4) \\ g_3 &= (0,6,8,2)(1,3,7,5)(4) \\ g_4 &= (0,2)(3,5)(6,8)(1)(4)(7) \\ g_5 &= (1,5)(0,8)(3,7)(2)(4)(6) \\ g_6 &= (0,6)(1,7)(2,8)(3)(4)(5) \\ g_7 &= (1,3)(2,6)(5,7)(0)(4)(8). \end{aligned}$$

Permutaatioiden tyypit ovat

$$\begin{aligned} \mathrm{type}(g_0) &= (9,0,0,0,0,0,0,0,0) \\ \mathrm{type}(g_{1,3}) &= (1,0,0,2,0,0,0,0,0) \\ \mathrm{type}(g_2) &= (1,4,0,0,0,0,0,0,0) \\ \mathrm{type}(g_{4,5,6,7}) &= (3,3,0,0,0,0,0,0,0). \end{aligned}$$

Montako 5-osajoukkoa kukin permutaatio kuvaa itselleen? Jos permutaation minkä tahansa syklin jokin alkio kuuluu osajoukkoon, kaikkien ko. syklin alkioiden on kuuluttava osajoukkoon, jotta permutaatio kuvaisi osajoukon itselleen. Lasketaan siis, montako tapaa on valita permutaation syklejä siten, että syklien yhteenlaskettu pituus on 5.

$$\begin{aligned} \chi_5(g_0) &= \binom{9}{5} = 126 \\ \chi_5(g_{1,3}) &= \binom{2}{1} = 2 \\ \chi_5(g_2) &= \binom{4}{2} = 6 \\ \chi_5(g_{4,5,6,7}) &= \binom{3}{1}\binom{3}{2} + \binom{3}{3}\binom{3}{1} = 12 \end{aligned}$$

Burnsiden lemmalla (kirjan s. 215, Lause 6.10)

$$N_k = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_k(g)$$

saadaan

$$N_5 = \frac{1}{8}(126 + 2 \cdot 2 + 6 + 4 \cdot 12) = 23.$$

Tehtävä 1 (b)

Muodostetaan k-osajoukkojen ratojen edustajajoukot R_k, kun $0 \leq k \leq 2$. Joukko R_2 tulee olemaan vastaus tehtävään.

$R_0 = \{\emptyset\}$, sillä tyhjä joukko on ainoa 9 alkion osajoukko, jonka koko on 0. Lisätään nyt vuorollaan kuhunkin R_0:n alkioon kukin alkioista $\{0, \ldots, 8\}$ ja lisätään syntynyt tulos joukkoon R_1, ellei joukossa R_1 ole jo leksikografisessa järjestyksessä aikaisemmin tullutta 1-osajoukkoa samalta radalta.

$$R_1 = \{\{0\}, \{1\}, \overbrace{\{2\}}^{\{0\}}, \overbrace{\{3\}}^{\{1\}}, \{4\}, \overbrace{\{5\}}^{\{1\}}, \overbrace{\{6\}}^{\{0\}}, \overbrace{\{7\}}^{\{1\}}, \overbrace{\{8\}}^{\{0\}}\} = \{\{0\}, \{1\}, \{4\}\}$$

Otetaan nyt vuorollaan kukin R_1:n joukoista ja lisätään siihen vuorollaan kukin alkio, joka on suurinta joukon alkiota suurempi. Lisätään syntynyt joukko R_2:een, ellei siellä jo ole aikaisempaa 2-osajoukkoa samalta radalta.

$$\begin{aligned} R_2 = \{ \quad & \{0,1\}, \{0,2\}, \overbrace{\{0,3\}}^{\{0,1\}}, \{0,4\}, \{0,5\}, \overbrace{\{0,6\}}^{\{0,2\}}, \overbrace{\{0,7\}}^{\{0,5\}}, \{0,8\}, \\ & \overbrace{\{1,2\}}^{\{0,1\}}, \{1,3\}, \{1,4\}, \overbrace{\{1,5\}}^{\{1,3\}}, \overbrace{\{1,6\}}^{\{0,5\}}, \{1,7\}, \overbrace{\{1,8\}}^{\{0,5\}}, \\ & \overbrace{\{4,5\}}^{\{1,4\}}, \overbrace{\{4,6\}}^{\{0,6\}}, \overbrace{\{4,7\}}^{\{1,4\}}, \overbrace{\{4,8\}}^{\{0,4\}} \; \} \end{aligned}$$

ja jäljelle jää siis

$$R_2 = \{\{0,1\}, \{0,2\}, \{0,4\}, \{0,5\}, \{0,8\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,7\}\}.$$

Huomautus: Yllä R_{k+1}:ä konstruoitaessa riittää lisätä edellisen R_k:n joukkoihin vuorollaan aiempia suuremmat alkiot, sillä tässä algoritmin versiossa kunkin radan edustajana on aina radan leksikografisessa järjestyksessä pienin alkio. Jos $(k+1)$-osajoukko $S \in R_{k+1}$ on ratansa leksikografisessa järjestyksessä pienin alkio, pätee, että joukko $S' = S \setminus \{\max(S)\}$ on myös ratansa pienin alkio, ts. $S' \in R_k$. Tästä seuraa, että jokainen R_{k+1}:n alkio voidaan konstruoida jostakin R_k:n alkiosta lisäämällä siihen aiempia suurempi alkio.

Tehtävä 2

Graafin $\mathcal{G}$ automorfismiryhmässä $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})$ on 48 alkiota:

$\mathbf{I}$	$(0,2,3,1)(4,6,7,5)$	$(0,5,3)(2,4,7)$
$(2,4)(3,5)$	$(0,2,6,7,5,1)(3,4)$	$(0,5)(2,7)$
$(1,2)(5,6)$	$(0,3,6)(1,7,4)$	$(0,5,3,6)(1,7,2,4)$
$(1,2,4)(3,6,5)$	$(0,3,5,6)(1,7,4,2)$	$(0,5,6)(1,7,2)$
$(1,4,2)(3,5,6)$	$(0,3,6,5)(1,2,7,4)$	$(0,6,3)(1,4,7)$
$(1,4)(3,6)$	$(0,3)(1,2)(4,7)(5,6)$	$(0,6,3,5)(1,4,2,7)$
$(0,1,3,7,6,4)(2,5)$	$(0,3,5)(2,7,4)$	$(0,6,5,3)(1,2,4,7)$
$(0,1,3,2)(4,5,7,6)$	$(0,3)(4,7)$	$(0,6,5)(1,2,7)$
$(0,1,5,4)(2,3,7,6)$	$(0,4,6,7,3,1)(2,5)$	$(0,6)(1,7)(2,4)(3,5)$
$(0,1,5,7,6,2)(3,4)$	$(0,4,5,1)(2,6,7,3)$	$(0,6)(1,7)$
$(0,1)(2,3)(4,5)(6,7)$	$(0,4,6,2)(1,5,7,3)$	$(0,7)(1,6)(2,5)(3,4)$
$(0,1)(2,5)(3,4)(6,7)$	$(0,4)(1,5)(2,6)(3,7)$	$(0,7)(1,6)(2,3)(4,5)$
$(0,2,6,4)(1,3,7,5)$	$(0,4,5,7,3,2)(1,6)$	$(0,7)(1,5)(2,6)(3,4)$
$(0,2)(1,3)(4,6)(5,7)$	$(0,4)(1,6)(2,5)(3,7)$	$(0,7)(1,5,4,6,2,3)$
$(0,2,3,7,5,4)(1,6)$	$(0,5,6,3)(1,4,7,2)$	$(0,7)(1,3,2,6,4,5)$
$(0,2)(1,6)(3,4)(5,7)$	$(0,5)(1,4)(2,7)(3,6)$	$(0,7)(1,3)(2,5)(4,5)$

Ryhmän generoivat permutaatiot $(0,1,3,7,6,4)(2,5)$ ja $(0,1,3,2)(4,5,7,6)$. Stabiloija-aliryhmät voi määrittää joko algoritmisesti ensin generoimalla ryhmälle Schreier-Sims esityksen (huomaa, että kirjan algoritmissa 6.9 on painovirhe; errata löytyy osoitteesta `http://www.math.mtu.edu/~kreher/cages.html`) ja tämän jälkeen käymällä algoritmin 6.6 avulla ryhmän kaikki alkiot läpi ja tulostamalla ne, jotka kuvaavat joukot $\{0,7\}$ ja $\{0,1,2,3\}$ itselleen. Toisaalta ainakin joukon $\{0,7\}$ stabiloijat

$\mathbf{I}$	$(1,4,2)(3,5,6)$	$(0,7)(1,5)(2,6)(3,4)$
$(2,4)(3,5)$	$(1,4)(3,6)$	$(0,7)(1,5,4,6,2,3)$
$(1,2)(5,6)$	$(0,7)(1,6)(2,5)(3,4)$	$(0,7)(1,3,2,6,4,5)$
$(1,2,4)(3,6,5)$	$(0,7)(1,6)(2,3)(4,5)$	$(0,7)(1,3)(2,5)(4,5)$

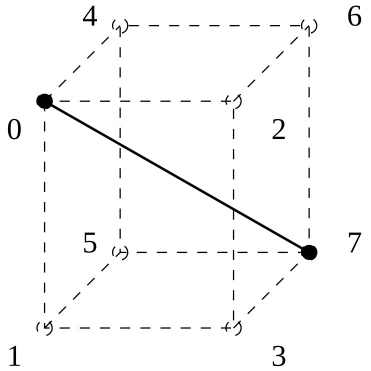
on helppo poimia kaikkien ryhmän permutaatioiden listasta suoraan. Stabiloija-aliryhmän $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,7\}}$ koko on siis 12, joten joukon $\{0,7\}$ radan ja toisaalta stabiloijan vasemman transversaalin koko on

$$|\mathsf{Aut}(\mathcal{G})|/|\mathsf{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,7\}}| = 48/12 = 4.$$

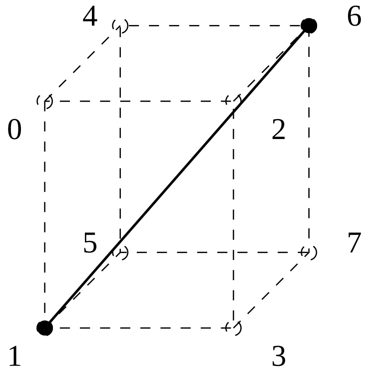
Vasemman transversaalin voi määrittää esim. kirjan algoritmilla 6.17, joka laskee juuri vasemman transversaalin; tätä ei erikseen mainita kirjan tekstissä. Erääksi vasemmaksi transversaaliksi saadaan

$$\begin{array}{ll} g_1 = \mathbf{I} & g_3 = (0,2,6,4)(1,3,7,5) \\ g_2 = (0,1,3,7,6,4)(2,5) & g_4 = (0,36)(1,7,4) \end{array}.$$

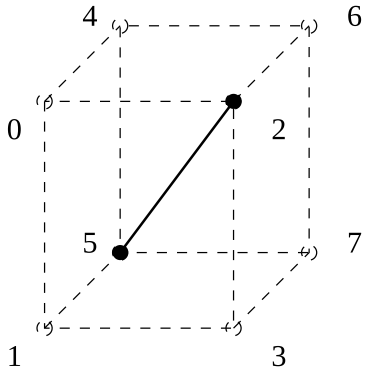
Osajoukon $\{0,7\}$ rata ja vastaava transversaali on esitetty alla.



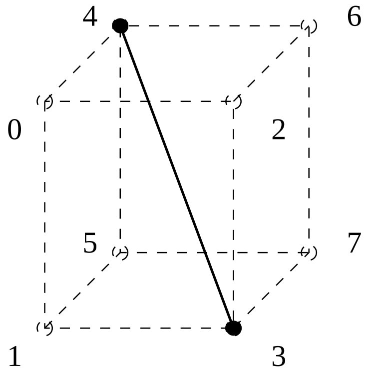
I



(0,1,3,7,6)(2,5)



(0,2,6,4)(1,3,7,5)



(0,3,6)(,1,7,4)

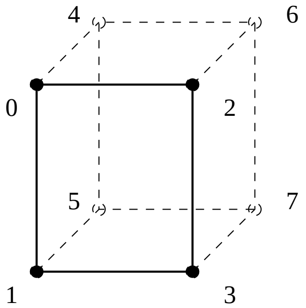
Vastaavasti osajoukon $\{0,1,2,3\}$ stabiloija-aliryhmä $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,1,2,3\}}$ koostuu permutaatioista

$$\begin{array}{ll} \mathbf{I} & (0,2)(1,3)(4,6)(5,7) \\ (1,2)(5,6) & (0,2,3,1)(4,6,7,5) \\ (0,1,3,2)(4,5,7,6) & (0,3)(1,2)(4,7)(5,6) \\ (0,1)(2,3)(4,5)(6,7) & (0,3)(4,7) \end{array},$$

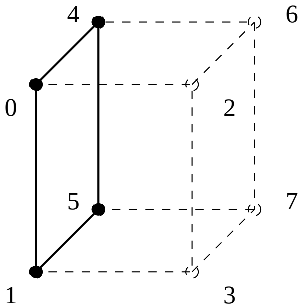
joten osajoukon $\{0,1,2,3\}$ radan pituus ja toisaalta $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,1,2,3\}}$:n vasemman transversaalin koko on $48/8 = 6$. Eräs vasen transversaali koostuu permutaatioista

$$\begin{array}{lll} g_1 = \mathbf{I} & g_3 = (1,2,4)(3,6,5) & g_5 = (0,2,6,4)(1,3,7,5) \\ g_2 = (2,4)(5,3) & g_4 = (0,1,3,7,6,4)(2,5) & g_6 = (0,4)(1,5)(2,6)(3,7) \end{array}.$$

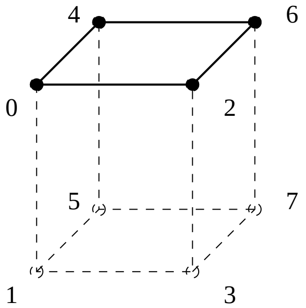
Osajoukon rata ja vastaavat transversaalin alkiot on esitetty alla.



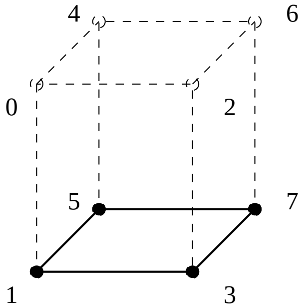
I



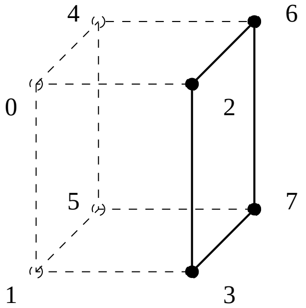
(2,4)(5,3)



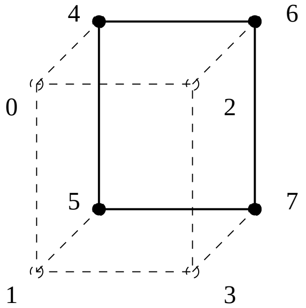
(1,2,4)(3,6,5)



(0,1,3,7,6,4)(2,5)



(0,2,6,4)(1,3,7,5)



(0,4)(1,5)(2,6)(3,7)