Laskuharjoitus 6

28.2.2002

Tutkitaan paikallisen haun naapurustojen määräämiä graafeja.

Konfiguraatiograafin solmuina ovat kaikki hakuavaruuden $\mathcal{X}$ alkiot, ja kahden solmun välillä on kaari jos ja vain jos solmut kuuluvat toistensa naapurustoon. (Oletetaan naapurusto $\mathsf{N} : \mathcal{X} \to 2^{\mathcal{X}}$ symmetriseksi, ts. kaikilla $x, y \in \mathcal{X}$ pätee $x \in \mathsf{N}(y)$ jos ja vain jos $y \in \mathsf{N}(x)$.)

1. Esitä mielekäs konfiguraatiograafi seuraaville ongelmille:

   (a) Eksakti peitto: etsi annetusta kokoelmasta perusjoukon osajoukkoja sellainen kokoelma osajoukkoja, jossa jokainen perusjoukon piste esiintyy täsmällään yhdessä osajoukossa.

   (b) Graafin solmujen väritys enintään k:lla värillä.

   (c) Kauppamatkustajan ongelma (transpositionaapurustolla).

   (d) Graafin ositus: Jaa graafin solmut, joita on parillinen määrä, kahteen yhtäsuureen osaan siten, että osien välisten kaarien määrä on mahdollisimman pieni/suuri.

   (e) Etsi k-klikki annetusta graafista.

2. Paikallisen haun kannalta mielenkiintoisia konfiguraatiograafin ominaisuuksia ovat mm.

   (a) solmujen lukumäärä (order)

   (b) solmun naapurisolmujen lukumäärä (vertex degree)

   (c) onko graafi kytketty (connected), eli onko jokaisesta solmusta polku kaikkiin muihin solmuihin

   (d) lyhimmän syklin pituus (girth)

   (e) pisimmän syklin pituus (circumference)

   (f) graafin halkaisija (diameter), eli pisimmän kahta solmua yhdistävän lyhimmän polun pituus.

   Määritä nämä ominaisuudet 1. tehtävän konfiguraatiograafeille.

Laskuharjoituksen 6 vastaukset

Tehtävä 1 (a,b)

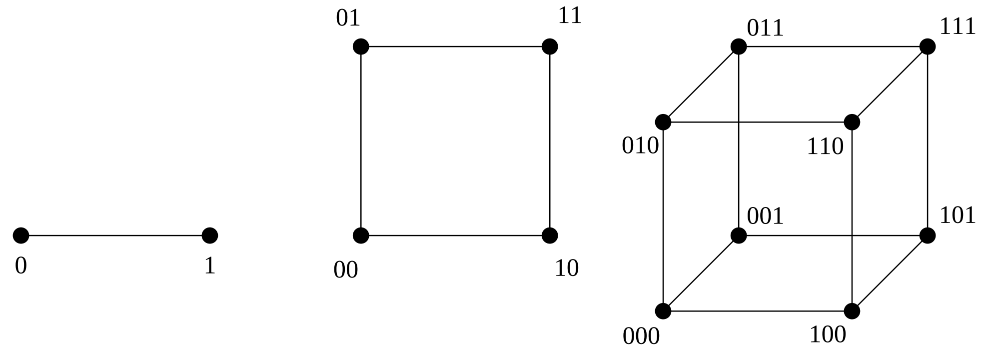
Oletetaan (a)-kohdassa, että annetussa osajoukkokokoelmassa on täsmälleen n osajoukkoa $E_1, E_2, \ldots, E_n \subseteq F$, missä F on perusjoukko. Paikallisen haun tehtävä on nyt löytää osajoukko $\{j_1, \ldots, j_w\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ siten, että $E_{j_1} \cup \cdots \cup E_{j_w} = F$ ja $E_{j_s} \cap E_{j_t} = \emptyset$ aina kun $s \neq t$. (Ts. kokoelma $E_{j_1}, \ldots, E_{j_w}$ osittaa joukon F.)

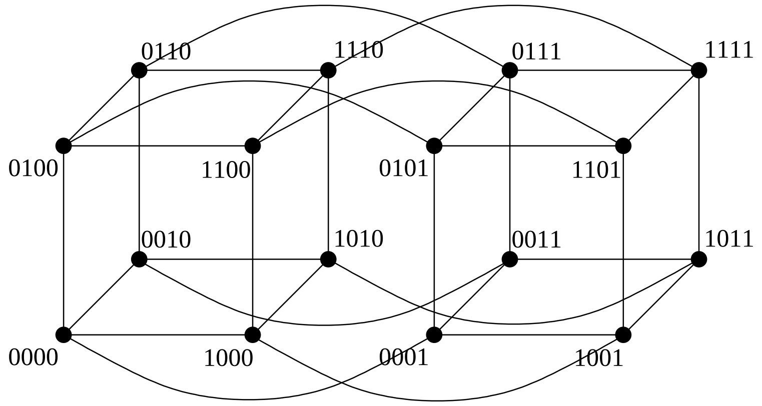
Valitaan hakuavaruudeksi $\mathcal{X}$ kaikki joukon $\{1, \ldots, n\}$ osajoukot, ja määritellään naapurusto N minimimuutosperiaatteella: osajoukko $x \in \mathcal{X}$ on osajoukon $y \in \mathcal{X}$ naapuri jos ja vain jos y on saatu x:stä lisäämällä tai poistamalla yksi alkio. Hakuavaruuden alkiot voidaan samaistaa n-mittaisten binäärijonojen kanssa jo tutuksi käyneellä tavalla.

Oletetaan (b)-kohdassa, että väritettävässä graafissa on täsmälleen n solmua, jotka on nimetty $v_1, \ldots, v_n$. Otetaan hakuavaruudeksi $\mathcal{X}$ kaikki tavat valita jokaiselle graafin solmulle jokin q:sta erilaisesta väristä. (Huomaa, että tällainen värivalinta ei yleisessä tapauksessa ole laillinen graafin väritys q:lla värillä.) Värivalinnat voidaan tällöin selvästi mieltää pituutta n oleviksi sanoiksi yli q-alkioisen aakkoston: sanan i:s kirjainpaikka määrää solmun v_i värin kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. Naapurusto voidaan jälleen määrätä minimimuutosperiaatteella: värivalinnat x ja y ovat toistensa naapureita jos ja vain jos ne poikkeavat toisistaan täsmälleen yhdessä paikassa.

(a)- ja (b)-kohtien naapurustovalintoja vastaava konfiguraatiograafi on seuraava: *Hamming-graafin* $H(n, q)$ solmujoukko koostuu kaikista pituutta n olevista sanoista yli q-alkioisen aakkoston $\Sigma_q = \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$, ts. $\mathcal{V} = \Sigma_q^n$. Solmujen $x, y \in \mathcal{V}$ välillä on kaari jos ja vain jos sanat x ja y poikkeavat toisistaan täsmälleen yhdessä paikassa.

Alla esimerkkinä Hamming-graafit $H(n, 2)$ kun $n = 1, 2, 3, 4$.



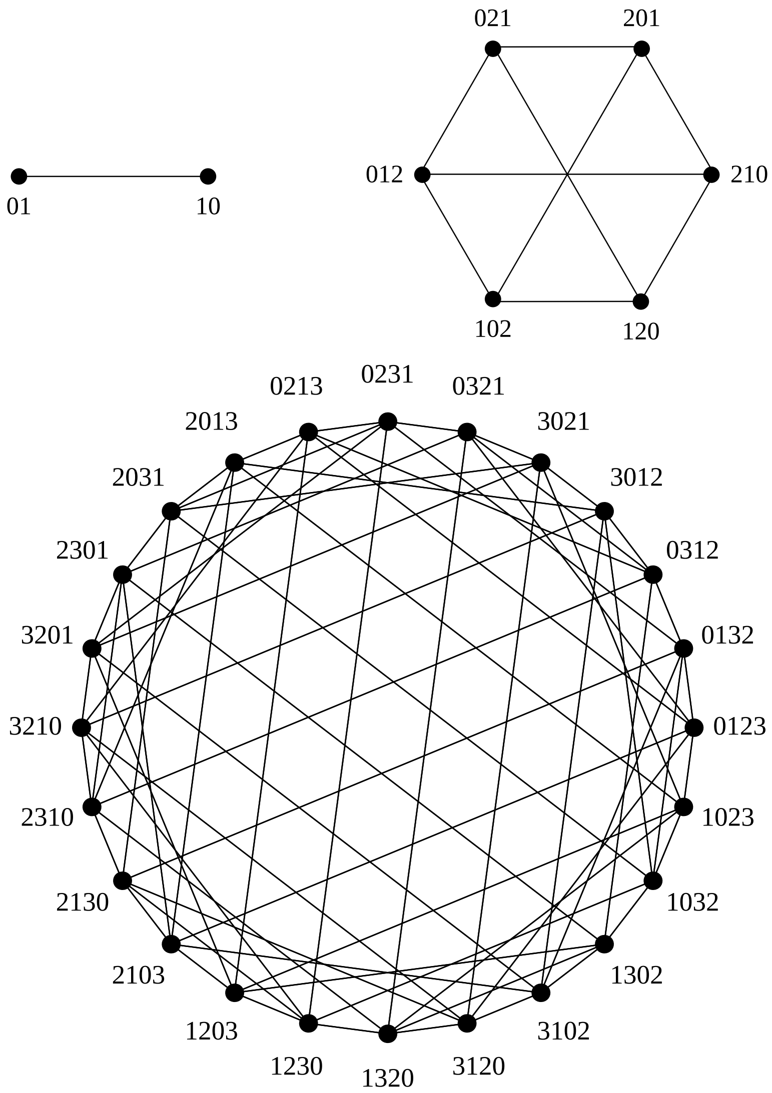


Tehtävä 1 (c)

Oletetaan, että kaupunkeja on n kappaletta. Mallinnetaan kauppamatkustajan mahdollisia kierroksia joukon $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ permutaatioina. Tällöin permutaation $\pi \in S_n = \mathcal{X}$ listaesitys $[\pi(0), \pi(1), \dots, \pi(n-1)]$ kertoo missä järjestyksessä kaupungit käydään läpi: lähdetään kaupungista $\pi(0)$, sitten kaupunkiin $\pi(1)$, ..., kunnes palataan kaupungista $\pi(n-1)$ takaisin kaupunkiin $\pi(0)$. Määritellään naapurusto siten, että kaksi permutaatiota $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{X}$ ovat toistensa naapureita jos ja vain jos toinen saadaan toisesta yhden transposition avulla (ts. toinen saadaan toisesta vaihtamalla kahden kaupungin paikkaa permutaation listaesityksessä).

Muodostuva konfiguraatiograafi on transpositioiden generoima symmetrisen ryhmän *Cayley-graafi*. Cayley-graafin $\Gamma(S_n, T_n)$ solmuina ovat kaikki joukon $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ permutaatiot $\pi \in S_n$. Permutaatioiden $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ välillä on kaari jos ja vain jos $\pi_1^{-1}\pi_2 \in T_n$, missä T_n on kaikkien joukon $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ transpositioiden joukko.

Alla esimerkkinä Cayley-graafit $\Gamma(S_n, T_n)$ kun $n = 2, 3, 4$.

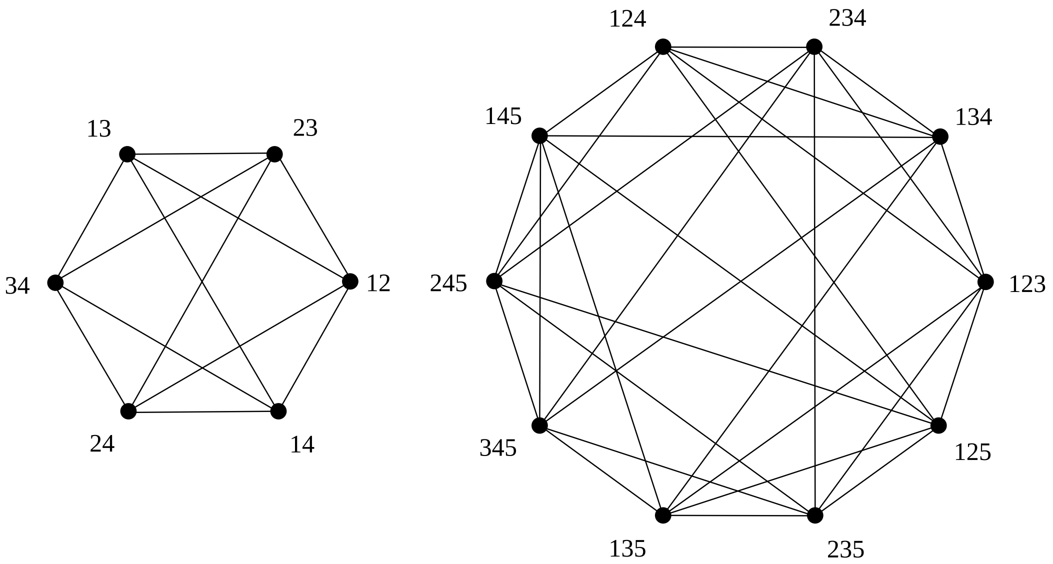


Tehtävä 1 (d,e)

Oletetaan (d)-kohdassa, että annetussa graafissa on $2n$ solmua. Graafinositusongelman hakuavaruudeksi $\mathcal{X}$ voidaan valita esimerkiksi kaikki annetun solmujoukon n-osajoukot. Tällöin kulloisenkin osituksen muodostavat tarkasteltava n-osajoukko ja sen komplementti. Vastaavasti (e)-kohdan klikkihaun tapauksessa hakuavaruudeksi $\mathcal{X}$ voidaan valita esimerkiksi kaikki solmujoukon k-osajoukot. Naapuruusto voidaan jälleen määritellä minimimuutosperiaatteella: osajoukot ovat toistensa naapureita jos ja vain jos toinen saadaan toisesta lisäämällä yksi ja poistamalla yksi alkio.

Muodostuva konfiguraatiograafi on *Johnson-graafi* $J(v, k)$: graafin solmuina ovat kaikki joukon $\{1, 2, \ldots, v\}$ k-osajoukot; kahden solmun E_1, E_2 välillä on kaari jos ja vain jos $|E_1 \cap E_2| = k - 1$.

Alla esimerkkinä Johnson-graafit $J(4, 2)$ ja $J(5, 3)$.



Tehtävä 2

Tarkastellaan ominaisuuksia graafiluokka kerrallaan.

1. Hamming-graafi $H(n, q)$

   (a) Solmujen lukumäärä on selvästi q^n.

   (b) Jokaisella solmulla on $n(q - 1)$ naapurisolmua, koska poikkeava koordinaatti voidaan valita n tavalla, ja poikkeava koordinaattiarvo $q - 1$ tavalla.

   (c) Hamming-graafi on kytketty. Mielivaltaisesta solmusta päästään mielivaltaiseen solmuun graafin kaaria pitkin muuttamalla lähtösolmun koordinaattiarvot koordinaatti kerrallaan maalisolmun koordinaattiarvoiksi.

   (d) Lyhimmän syklin pituus on 4 kun $q = 2$, ja 3 kun $q > 2$. Tämä nähdään

   (e) Pisimmän syklin pituus on q^n, ts. graafista löytyy sykli, jossa esiintyvät kaikki sen solmut. Tapauksessa $q = 2$ tällaisen syklin muodostaa esimerkiksi aiemmin tarkasteltu peilattu Gray-koodi G^n. Peilatun Gray-koodin konstruktio yleistyy suoraviivaisesti tapauksiin, missä q on parillinen. Parittoman q:n tapauksessa peilauskonstruktio toimii hieman muutettuna: Olkoon $x_1, \ldots, x_N$ pituutta n oleva koodi. Muodostetaan pituutta $n+1$ oleva koodi seuraavasti:

- Toistetaan kaikille $0 \leq p \leq q-3$:
  Jos p parillinen, tulosta osakoodi $px_1, px_2, \ldots, px_N$.
  Jos p pariton, tulosta osakoodi $px_N, px_{N-1}, \ldots, px_1$.
- Tulosta osakoodi $(q-2)x_N, (q-2)x_{N-1}, \ldots, (q-2)x_2$.
- Tulosta osakoodi $(q-1)x_2, (q-1)x_3, \ldots, (q-1)x_N$.
- Tulosta osakoodi $(q-1)x_1, (q-2)x_1$.

(f) Graafin halkaisija on selvästi n, koska mistä tahansa solmusta pääsee mihin tahansa solmuun muuttamalla enintään n koordinaattipaikkaa. Toisaalta n koordinaattipaikkamuutosta tarvitaan, jotta päästäisiin esimerkiksi solmusta $00\cdots0$ solmuun $11\cdots1$.

2. Cayley-graafi $\Gamma(S_n, T_n)$

(a) Koska joukon $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ permutaatioita on $n!$ kpl, on graafissa $n!$ solmua.

(b) Joukon $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ transpositioita on $\binom{n}{2}$ kpl, joten millä tahansa graafin solmulla on yhtä monta naapurisolmua.

(c) Graafi on kytketty, koska transpositiot generoivat symmetrisen ryhmän.

(d) Tapauksessa $n = 2$ graafissa ei ole syklejä. Muutoin lyhimmän syklin pituus on enintään 4: permutaatiot

$$\pi, \quad \pi(0,1), \quad \pi(0,1)(1,2), \quad \pi(0,1)(1,2)(0,1)$$

muodostavat 4-syklin, koska $\pi(0,1)(1,2)(0,1)(0,2) = \pi$. Toisaalta graafi ei voi sisältää 3:n mittaista sykliä, koska tällöin syklin kaaria vastaavat 3 transpositiota muodostaisivat identiteettipermutaation, mikä on mahdotonta koska identiteetti on parillinen permutaatio.

(e) Pisimmän syklin pituus on $n!$, joka saadaan esim. Trotter-Johnson minimimuutosjärjestyksestä.

(f) Graafin halkaisija on $n-1$, sillä mikä tahansa permutaatio voidaan esittää enintään $n-1$ transposition tulona. Toisaalta esimerkiksi identiteetistä n-sykliin $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$ pääsemiseksi tarvitaan ainakin $n-1$ transpositiota.

3. Johnson-graafi $J(v, k)$

(a) Solmuja on yhtä monta kuin v-joukolla k-osajoukkoja, ts. $\binom{v}{k}$ kpl.

(b) Annetusta v-joukon k-osajoukosta voidaan ottaa alkio pois k:lla tavalla, ja siihen lisätä poistetusta poikkeava alkio $v - k$ tavalla. Näin ollen kaikilla solmuilla on $k(v - k)$ naapurisolmua.

(c) Graafi on kytketty, koska on selvää että alkioita lisäämällä ja poistamalla mikä tahansa k-osajoukko voidaan muuttaa miksi tahansa toiseksi k-osajoukoksi.

(d) Tapauksissa $v = k$ tai $v = 2$ graafissa ei ole syklejä. Lyhimmän syklin pituus on selvästi 3, koska $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{y, z\}$ ovat toistensa naapureita kun $k \geq 2$. Tapaus $k = 1$ on suoraviivainen.

(e) Pisimmän syklin pituus on $\binom{v}{k}$, mikä saadaan esim. revolving door -minimimuutosjärjestyksestä (kirjan s. 48–52).

(f) Graafin halkaisija on enintään k, mikä saavutetaan kun graafista on löydettävissä kaksi solmua, jotka eivät leikkaa toisiaan. Näin on selvästi täsmälleen silloin kun $v \geq 2k$. Kun $v < 2k$, mielivaltaiset kaksi k-osajoukkoa leikkaavat ainakin $2k - v$ pisteessä. Näin ollen graafin halkaisijaksi saadaan yleisessä tapauksessa $k - \max(2k - v, 0) = \min(k, v - k)$.