Laskuharjoitus 2

24.1.2002

1. Permutaation sykli- ja listaesitykset.

   (a) Esitä permutaatio $\pi_1 = [2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ pistevieraiden syklien tulona.

   (b) Esitä permutaatio $\pi_2 = (1, 5, 6)(2, 4, 3)(7)$ listana.

   (c) Määritä tulo $\pi_1\pi_2$ ja käänteispermutaatiot π_1^{-1}, π_2^{-1}.

2. Oletetaan, että $p, q, r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_l$, missä $k, l \geq 0$, ovat toisistaan poikkeavia alkioita. Sievennä seuraavat syklien tuloina annetut permutaatiot pistevieraiden syklien tuloiksi:

   (a) $(p, q)(p, r_1, \ldots, r_k, q, s_1, \ldots, s_l)$

   (b) $(p, q)(p, r_1, \ldots, r_k)(q, s_1, \ldots, s_l)$

3. Permutaatio π on *parillinen* jos se voidaan esittää parillisen määrän transpositioita tulona. Vastaavasti π on *pariton* jos se voidaan esittää parittoman määrän transpositioita tulona. Jokainen permutaatio on joko pariton tai parillinen.

   (a) Olkoon $r \geq 1$. Esitä r-sykli $(1, 2, \ldots, r)$ transpositioiden tulona.

   (b) Edellisen perusteella esitä permutaatio $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ transpositioiden tulona. Onko permutaatio parillinen vai pariton?

4. Kirjan tehtävä 2.11: Määritä permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ rank ja seuraaja sekä leksikografisessa että Trotter-Johnson -järjestyksessä.

Laskuharjoituksen 2 vastaukset

Kerrataan aluksi muutamia permutaatioihin liittyviä määritelmiä. Olkoon X äärellinen ei-tyhjä joukko.

- Joukon X permutaatio σ on *r-sykli* jos on olemassa alkiot $a_1, \ldots, a_r \in X$ siten, että

  $$\sigma(a_1) = a_2, \quad \sigma(a_2) = a_3, \quad \ldots, \sigma(a_{r-1}) = a_r, \quad \sigma(a_r) = a_1,$$

  ja $\sigma(a) = a$ kaikilla $a \in X \setminus \{a_1, \ldots, a_r\}$. Edellinen r-sykli on tapana kirjoittaa $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Sama sykli voidaan tällä tavoin esittää useammalla tavalla, koska syklin alkupiste on mielivaltainen; esim. $(a_2, a_3, \ldots, a_r, a_1) = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$.

- *Transpositio* on mielivaltainen joukon X 2-sykli.

- Joukon X permutaatiot σ_1, σ_2 ovat *pistevieraat* jos millään $x \in X$ ei päde sekä $\sigma_1(x) \neq x$ että $\sigma_2(x) \neq x$.

- Joukon X permutaatioiden π_1, π_2 *tulo* $\pi_1\pi_2$ määritellään kaikille $x \in X$ säännöstä $\pi_1\pi_2(x) = \pi_1 \circ \pi_2(x) = \pi_1(\pi_2(x))$.

- Jokainen joukon X permutaatio voidaan esittää (syklien järjestystä vaille) yksikäsitteisesti pistevieraiden syklien tulona, jossa jokainen $x \in X$ esiintyy täsmälleen yhdellä syklillä.

Tehtävä 1 (a)

Permutaation π_1 listaesityksestä $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ nähdään, että

$$\pi_1(1) = 2, \quad \pi_1(2) = 4, \quad \pi_1(4) = 7, \quad \pi_1(7) = 1,$$

joten alkion 1 sisältävä sykli on $(1, 2, 4, 7)$. Pienin joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ alkio joka ei ole tällä syklillä on 3. Alkion 3 sisältävä sykli on $(3, 6)$, koska

$$\pi_1(3) = 6, \quad \pi_1(6) = 3.$$

Pienin alkio joka ei ole edellisillä sykleillä on 5, jolle pätee $\pi_1(5) = 5$. Nyt kaikki joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ alkioiden syklit on käyty läpi, joten saadaan

$$\pi_1 = (1, 2, 4, 7)(3, 6)(5).$$

Tehtävä 1 (b)

Sykliesityksestä $\pi_2 = (1,5,6)(2,4,3)(7)$ nähdään

$$\pi_2(1) = 5, \quad \pi_2(2) = 4, \quad \pi_2(3) = 2, \quad \pi_2(4) = 3,$$
$$\pi_2(5) = 6, \quad \pi_2(6) = 1, \quad \pi_2(7) = 7,$$

joten $\pi_2 = [5,4,2,3,6,1,7]$.

Tehtävä 1 (c)

Tulo $\pi_1\pi_2$ on sykliesityksien avulla

$$\pi_1\pi_2 = (1,2,4,7)(3,6)(5)(1,5,6)(2,4,3)(7),$$

joka voidaan sieventää muotoon

$$\pi_1\pi_2 = (1,5,3,4,6,2,7)$$

määrittämällä jokaisen alkion kuva. Määritettäessä alkion kuvaa syklien tulossa syklejä luetaan järjestyksessä *oikealta vasemmalle*. Esim. edellisessä tulossa sykli (7) pitää alkion 1 paikallaan, kuten myös (2,4,3). Sykli $(1,5,6)$ kuvaa alkion 1 alkiolle 5. Sykli (5) pitää alkion 5 paikallaan, kuten myös syklit $(3,6)$ ja $(1,2,4,7)$. Näin ollen $\pi_1\pi_2(1) = 5$.

Permutaation käänteispermutaatio muodostetaan helposti sen sykliesityksestä kääntämällä sekä syklien, että syklien alkioiden järjestys päinvastaiseksi. Esimerkiksi

$$\pi_1^{-1} = (5)(6,3)(7,4,2,1), \qquad \pi_2^{-1} = (7)(3,4,2)(6,5,1).$$

Tehtävä 2

Tehtävän tulot ovat sievennetyssä muodossa

$$(p,q)(p,r_1,\ldots,r_k,q,s_1,\ldots,s_l) = (p,r_1,\ldots,r_k)(q,s_1,\ldots,s_l)$$

ja

$$(p,q)(p,r_1,\ldots,r_k)(q,s_1,\ldots,s_l) = (p,r_1,\ldots,r_k,q,s_1,\ldots,s_l).$$

Näin ollen transpositiolla vasemmalta kertominen joko "leikkaa" syklin kahtia, tai "yhdistää" kaksi pistevierasta sykliä.

Edellisestä huomataan että jos mielivaltainen permutaatio π kerrotaan vasemmalta transpositiolla (p,q), niin tällöin permutaatiossa $(p,q)\pi$ on joko yksi sykli enemmän (a-kohta) kuin permutaatiossa π, tai yksi sykli vähemmän (b-kohta).

Tehtävä 3

Tehtävän (a)-kohdan r-sykli voidaan esittää monella tavalla transpositioiden tulona. Esimerkiksi

$$(1, 2, \ldots, r) = (1, 2)(2, 3)(4, 5) \cdots (r-2, r-1)(r-1, r)$$

tai

$$(1, 2, \ldots, r) = (1, r)(1, r-1)(1, r-2) \cdots (1, 3)(1, 2)$$

ovat molemmat käypiä esitystapoja, joihin tarvitaan $r - 1$ transpositiota.

Tehtävän (b)-kohdassa transpositioesitys voidaan muodostaa esimerkiksi määrittämällä ensin permutaatiolle $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ esitys pistevieraiden syklien avulla (ks. tehtävä 1a) ja tämän jälkeen sovelletaan jokaiselle syklille (a)-kohtaa. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1] &= (1, 2, 4, 7)(3, 6)(5) \\ &= (1, 2)(2, 4)(4, 7)(3, 6).\end{aligned}$$

Permutaatio $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ on siis parillinen.

Yleisesti jos joukon X permutaation π esityksessä pistevieraiden syklien avulla on c sykliä, joiden pituudet ovat $r_1, \ldots, r_c$, saadaan, että permutaatio voidaan esittää $N_\pi = \sum_{i=1}^{c}(r_i - 1)$ transposition avulla. Koska $\sum_{i=1}^{c} r_i = |X|$, voidaan edellinen sieventää muotoon $N_\pi = |X| - c$. Permutaatio π on nyt parillinen (vastaavasti pariton) täsmälleen jos N_π on parillinen (pariton).

Tehtävä 4

Tarkastellaan ensin leksikografista järjestystä. Permutaation

$$\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)]$$

leksikografinen seuraaja määritetään seuraavasti:

1. Etsitään suurin $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, jolle pätee $\pi(j) < \pi(j+1)$. Jos tällaista ei ole olemassa, kyseessä on leksikografisessa järjestyksessä viimeinen permutaatio $[n, n-1, \ldots, 1]$, jolla ei ole seuraajaa.

   Permutaatiolle $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ on $j = 3$.

2. Etsitään alkioista $\pi(j+1), \ldots, \pi(n)$ pienin alkio, joka on suurempi kuin $\pi(j)$.

   Permutaatiolle $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tämä alkio on 7.

3. Vaihdetaan edellisessä kohdassa valittu alkio ja $\pi(j)$ keskenään. Tulokseksi saadaan permutaatio π'.

   Permutaation $[2,4,6,7,5,3,1]$ tapauksessa pätee $\pi' = [2,4,7,6,5,3,1]$.

4. Järjestetään alkiot $\pi'(j+1), \ldots, \pi'(n)$ kasvavaan järjestykseen (koska alkiot ovat valmiiksi laskevassa järjestyksessä, riittää kääntää niiden järjestys). Tuloksena saadaan π:n leksikografinen seuraajapermutaatio.

   Permutaation $[2,4,6,7,5,3,1]$ tapauksessa seuraaja on $[2,4,7,1,3,5,6]$.

Permutaation $\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)]$ leksikografinen rank määritetään rekursiivisesti:

1. Perustapaus $n = 1$: $\mathsf{rank}(\pi) = 0$.

2. Yleinen tapaus $n \geq 2$:

$$\mathsf{rank}(\pi) = (\pi(1) - 1)(n-1)! + \mathsf{rank}(\pi'),$$

   missä

$$\pi'(j) = \begin{cases} \pi(j+1) & \text{jos } \pi(j+1) < \pi(1); \\ \pi(j+1) - 1 & \text{jos } \pi(j+1) > \pi(1). \end{cases}$$

Permutaation $[2,4,6,7,5,3,1]$ rank on edellisen perusteella

$$\begin{aligned}
&\mathsf{rank}([2,4,6,7,5,3,1]) = \\
&= (2-1)6! + \mathsf{rank}([3,5,6,4,2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + \mathsf{rank}([4,5,3,2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + \mathsf{rank}([4,3,2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + (4-1)3! + \mathsf{rank}([3,2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + (4-1)3! + (3-1)2! + \mathsf{rank}([2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + (4-1)3! + (3-1)2! + (2-1)1! \\
&= 1 \cdot 6! + 2 \cdot 5! + 3 \cdot 4! + 3 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! \\
&= 1055.
\end{aligned}$$

Siirrytään nyt Trotter-Johnson järjestykseen. Trotter-Johnson järjestyksessä permutaation

$$\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)]$$

seuraaja määritetään:

1. Etsitään $j \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että $\pi(j) = n$.

   Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa $\pi(4) = 7$.

2. Määritetään, onko permutaatio $\pi' = [\pi(1), \ldots, \pi(j-1), \pi(j+1), \ldots, \pi(n)]$ parillinen vai pariton.

   Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa

   $$\pi' = [2, 4, 6, 5, 3, 1] = (1, 2, 4, 5, 3, 6)$$

   on pariton.

3. Jos π' on parillinen ja $j > 1$: permutaation π seuraaja saadaan vaihtamalla alkiot $\pi(j-1)$ ja $\pi(j)$ keskenään.

4. Jos π' on parillinen ja $j = 1$: permutaation π seuraaja on

   $$[n, \pi''(1), \pi''(2), \ldots, \pi''(n-1)],$$

   missä π'' on permutaation π' Trotter-Johnson seuraaja.

5. Jos π' on pariton ja $j < n$: permutaation π seuraaja saadaan vaihtamalla alkiot $\pi(j)$ ja $\pi(j+1)$ keskenään.

   Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa Trotter-Johnson seuraaja on näin ollen $[2, 4, 6, 5, 7, 3, 1]$.

6. Jos π' on pariton ja $j = n$: permutaation π seuraaja on

   $$[\pi''(1), \pi''(2), \ldots, \pi''(n-1), n],$$

   missä π'' on permutaation π' Trotter-Johnson seuraaja.

Permutaation π Trotter-Johnson rank lasketaan rekursiivisesti:

1. Perustapaus $n = 1$: $\mathsf{rank}(\pi) = 0$.

2. Etsitään $j \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että $\pi(j) = n$.

3. Määritetään rekursiivisesti permutaation

   $$\pi' = [\pi(1), \ldots, \pi(j-1), \pi(j+1), \ldots, \pi(n)]$$

   rank.

4. Jos $\mathsf{rank}(\pi')$ on parillinen, asetetaan

   $$\mathsf{rank}(\pi) = n\mathsf{rank}(\pi') + n - j.$$

5. Jos $\mathsf{rank}(\pi')$ on pariton, asetetaan

$$\mathsf{rank}(\pi) = n\mathsf{rank}(\pi') + j - 1.$$

Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa:

n	π	j	$\mathsf{rank}(\pi)$
1	$[1]$	1	0
2	$[2, 1]$	1	$2 \cdot 0 + (2 - 1) = 1$
3	$[2, 3, 1]$	2	$3 \cdot 1 + (2 - 1) = 4$
4	$[2, 4, 3, 1]$	2	$4 \cdot 4 + (4 - 2) = 18$
5	$[2, 4, 5, 3, 1]$	3	$5 \cdot 18 + (5 - 3) = 92$
6	$[2, 4, 6, 5, 3, 1]$	3	$6 \cdot 92 + (6 - 3) = 555$
7	$[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$	4	$7 \cdot 555 + (4 - 1) = 3888$