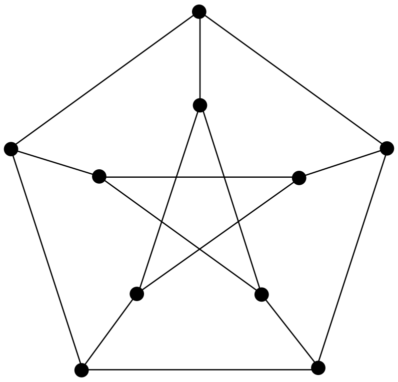
Laskuharjoitus 1

17.1.2002

1. Muodosta allaolevalle *Petersenin graafille* naapuruus- ja insidenssimatriisit.



2. Leksikografinen järjestys k-osajoukoille.

   (a) Määritä leksikografisessa järjestyksessä 100. joukon $\{1, 2, \ldots, 10\}$ 3-osajoukko.

   (b) Määritä osajoukon $\{3, 5, 7\}$ leksikografinen rank joukon $\{1, 2, \ldots, 10\}$ 3-osajoukkojen joukossa.

3. Minimimuutosjärjestys osajoukoille.

   (a) Määritä koodisanan 01010110 rank peilatussa Gray-koodissa (binary reflected Gray code) G^8.

   (b) Määritä järjestyksessä 100. peilatun Gray-koodin G^8 koodisana.

4. Määrittele leksikografiset (= "puhelinluettelojärjestys") rank- ja unrank-funktiot muotoa

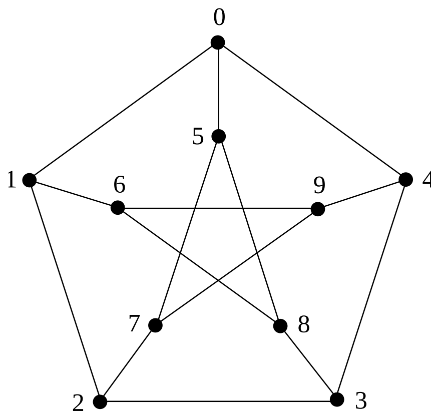
$$\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2\mathrm{X}_3\text{-}\mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_2\mathrm{Y}_3$$

   oleville auton rekisterikilville, missä $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3 \in \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \ldots, \mathrm{Z}\}$ ja $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \mathrm{Y}_3 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Mikä on rekisterikilven IOI-010 rank?

Laskuharjoituksen 1 vastaukset

Tehtävä 1

Nimetään aluksi Petersenin graafin solmut kuten alla.



Tällöin naapuruusmatriisiksi saadaan

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1 .
5	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
6	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
7	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
8	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
9	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0

(Naapuruusmatriisissa solmua i vastaavalla rivillä on solmua j vastaavassa sarakkeessa alkio 1 jos solmujen i ja j välillä on kaari graafissa; muussa tapauksessa kyseinen alkio on 0.)

Vastaavasti insidenssimatriisiksi saadaan

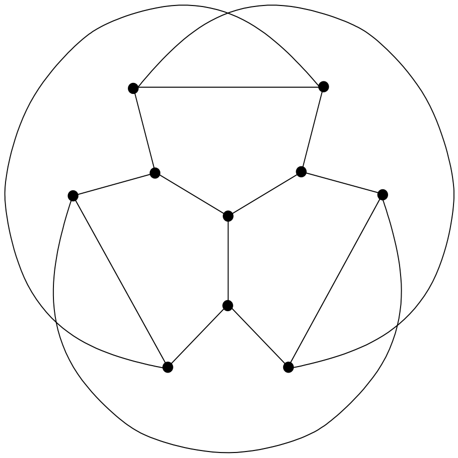
	01	12	23	34	40	05	16	27	38	49	57	58	68	69	79
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1

.

(Insidenssimatriisissa solmua i vastaavalla rivillä on kaarta $\{j, k\}$ vastaavassa sarakkeessa alkio 1 jos $i \in \{j, k\}$; muussa tapauksessa kyseinen alkio on 0.)

Huomaa, että sekä naapuruus- että insidenssimatriisi riippuvat solmujen nimeämistavasta.

Lisätehtävä. Alla on toinen esitystapa Petersenin graafille. Etsi tapa nimetä graafin solmut siten, että tulokseksi saadaan sama naapuruus/insidenssimatriisi kuin edellä. (Ratkaisuja on useampia kuin yksi.)



Tehtävä 2 (a)

Käytetään hyväksi k-osajoukkojen koleksikografisen ja leksikografisen järjestyksen välistä yhteyttä (kirjan lause 2.4): Olkoon $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ tutkittava k-osajoukko ja $T' \stackrel{\text{def}}{=} \{n + 1 - i \,:\, i \in T\}$. Tällöin pätee

$$\mathsf{rank}_{\text{lex}}(T) + \mathsf{rank}_{\text{colex}}(T') = \binom{n}{k} - 1.$$

Tehtävässä on annettu $n = 10$, $k = 3$ ja $\mathsf{rank}(T) = 99$, joten

$$\mathsf{rank}_{\mathrm{colex}}(T') = \binom{10}{3} - 1 - 99 = 120 - 1 - 99 = 20.$$

Käytetään kirjan algoritmia 2.10 laskemaan $T' = \{t'_1, t'_2, t'_3\} = \mathsf{unrank}_{\mathrm{colex}}(20)$ kun $n = 10$ ja $k = 3$. Tulokseksi saadaan

$$20 = 20 + 0 + 0 = \binom{6}{3} + \binom{1}{2} + \binom{0}{1},$$

joten

$$t'_1 = 6 + 1 = 7, \qquad t'_2 = 1 + 1 = 2, \qquad t'_3 = 0 + 1 = 1.$$

Nyt siis $T' = \{7, 2, 1\}$, joten $T = \{4, 9, 10\}$.

Tehtävä 2 (b)

Ratkaistaan tehtävä vastaavalla tempulla kuten edellä: Nyt $T = \{3, 5, 7\}$, joten $T' = \{8, 6, 4\}$. Koleksikografisen rank-funktion määritelmästä

$$\mathsf{rank}_{\mathrm{colex}}(T') \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{k} \binom{t_i - 1}{k + 1 - i}$$

saadaan tapauksessa $t'_1 = 8$, $t'_2 = 6$, $t'_3 = 4$

$$\mathsf{rank}_{\mathrm{colex}}(\{8, 6, 4\}) = \binom{7}{3} + \binom{5}{2} + \binom{3}{1} = 35 + 10 + 3 = 48,$$

joten

$$\mathsf{rank}_{\mathrm{lex}}(\{3, 5, 7\}) = \binom{10}{3} - 1 - \mathsf{rank}_{\mathrm{colex}}(\{8, 6, 4\}) = 120 - 1 - 48 = 71.$$

Tehtävä 3 (a)

Johdetaan aluksi rekursiivinen versio rank-funktiosta peilatulle Gray-koodille G^n. (Ei-rekursiivinen versio on kirjan algoritmi 2.4.) Perustapauksessa $n = 1$ pätee selvästi

$$\mathsf{rank}(0) = 0, \qquad \mathsf{rank}(1) = 1.$$

Tapauksissa $n \geq 2$ pätee koodin G^n rekursiivisen määritelmän perusteella

$$\mathsf{rank}(b_n b_{n-1} \cdots b_1) = \begin{cases} \mathsf{rank}(b_{n-1} \cdots b_1) & \text{jos } b_n = 0; \\ 2^n - 1 - \mathsf{rank}(b_{n-1} \cdots b_1) & \text{jos } b_n = 1. \end{cases}$$

Koodisanan 01010110 rank saadaan nyt rekursion avulla:

$$\begin{aligned} \mathsf{rank}(01010110) &= \mathsf{rank}(1010110) \\ &= 127 - \mathsf{rank}(010110) \\ &= 127 - \mathsf{rank}(10110) \\ &= 127 - (31 - \mathsf{rank}(0110)) \\ &= 127 - (31 - \mathsf{rank}(110)) \\ &= 127 - (31 - (7 - \mathsf{rank}(10))) \\ &= 127 - (31 - (7 - (3 - \mathsf{rank}(0)))) \\ &= 127 - (31 - (7 - (3 - 0))) \\ &= 100. \end{aligned}$$

Tehtävä 3 (b)

Olkoon koodiin G^n kuuluvan koodisanan $b_n b_{n-1} \cdots b_1$ rank r_n. Nyt unrank voidaan tehdä tarkastelemalla rekursiivisesti kumpaan G^n:n puoliskoon (0-alkuiset koodisanat / 1-alkuiset koodisanat) koodisana kuuluu:

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{jos } r_n < 2^{n-1}; \\ 1 & \text{jos } r_n \geq 2^{n-1}, \end{cases} \qquad r_{n-1} = \begin{cases} r_n & \text{jos } r_n < 2^{n-1}; \\ 2^n - 1 - r_n & \text{jos } r_n \geq 2^{n-1}. \end{cases}$$

Tehtävässä on annettu $r_8 = 99$. Edellistä soveltamalla saadaan

n	r_n	2^{n-1}	b_n
8	99	128	0
7	99	64	1
6	28	32	0
5	28	16	1
4	3	8	0
3	3	4	0
2	3	2	1
1	0	1	0

.

Joten $\mathsf{unrank}(99) = 01010010$. (Vaihtoehtoisesti tehtävä voidaan ratkaista kirjan algoritmilla 2.5.)

Tehtävä 4

Samaistetaan aluksi aakkosten kirjaimet A, B, C, ..., Z lukujen $0, 1, \ldots, 25$ kanssa:

$$\mathrm{A} \triangleq 0, \quad \mathrm{B} \triangleq 1, \quad \mathrm{C} \triangleq 2, \quad \cdots \quad \mathrm{Y} \triangleq 24, \quad \mathrm{Z} \triangleq 25.$$

Tarkastellaan rekisterikilpiä muotoa $[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ olevina listoina, missä $z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1, \ldots, 25\}$ ja $z_4, z_5, z_6 \in \{0, 1, \ldots, 10\}$. Tällöin esimerkiksi kilpeä IOI-010 vastaa lista $[8, 14, 8, 0, 1, 0]$.

Tavanomainen leksikografinen järjestys rekisterikilpien välillä määräytyy nyt ehdosta $[z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6] < [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ jos ja vain jos on olemassa $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ s.e. $z'_j < z_j$ ja kaikilla $i \in \{1, \ldots, j-1\}$ pätee $z'_i = z_i$.

Rakennetaan aluksi rank-funktio. Kilven $[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ leksikografinen rank on niiden kilpien $[z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6]$ lukumäärä, joille pätee $[z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6] < [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$. Tällaiset kilvet voidaan jakaa alitapauksiin j:n arvon (ks. leksikografisen järjestyksen määritelmä yllä) perusteella. Erityisesti z'_j voidaan valita z_j tavalla siten, että $z'_j < z_j$. Tämän jälkeen arvot z'_k, missä $k > j$, voidaan valita mielivaltaisesti. Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned}\mathsf{rank}([z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]) = {} & z_1 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\ & + z_2 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\ & + z_3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\ & + z_4 \cdot 10 \cdot 10 + \\ & + z_5 \cdot 10 + \\ & + z_6.\end{aligned}$$

Eli lyhyemmin

$$\mathsf{rank}([z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]) = \sum_{j=1}^{6} \bigl(z_j \prod_{k=j+1}^{6} B_k\bigr)$$

jos asetetaan $B_1 = B_2 = B_3 = 26$ ja $B_4 = B_5 = B_6 = 10$. (Tapauksessa $j = 6$ määritellään lisäksi $\prod_{k=j+1}^{6} B_k = 1$.)

Kilvelle IOI-010 saadaan nyt

$$\begin{aligned}\mathsf{rank}([8,14,8,1,0,1]) &= 8\cdot 26\cdot 26\cdot 10\cdot 10\cdot 10\,+\\ &\quad+14\cdot 26\cdot 10\cdot 10\cdot 10\,+\\ &\quad+8\cdot 10\cdot 10\cdot 10\,+\\ &\quad+0\cdot 10\cdot 10\,+\\ &\quad+1\cdot 10\,+\\ &\quad+0\\ &= 5780010.\end{aligned}$$

Unrank voidaan tehdä seuraavalla algoritmilla:

1. Asetetaan $n_6 \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{rank}([z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6])$.
2. Toistetaan kaikille $i = 6, 5, \ldots, 1$.
   (a) Määritetään jakojäännös $z_i = n_i \mod B_i$.
   (b) Asetetaan $n_{i-1} = (n_i - z_i)/B_i$.
3. Palautetaan tulos $\mathsf{unrank}(n_6) = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$.

Esimerkiksi

i	n_i	B_i	z_i
6	5780010	10	0
5	578001	10	1
4	57800	10	0
3	5780	26	8
2	222	26	14
1	8	26	8

,

joten $\mathsf{unrank}(5780010) = [8, 14, 8, 0, 1, 0]$ kuten pitääkin.