Tietojenkäsittelyteoria, kevät 2000
Harjoitus 3, to 10.2. klo 10–12 sali MaD381

1. Osoita, että jos $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ on polynomisessa ajassa laskettava funktio, niin jokaisella merkkijonolla $x \in \Gamma^*$ kuuluu alkukuvajoukko $f^{-1}(x)$ luokkaan P. Yleistä tulos koskemaan kaikkia alkukuvajoukkoja $f^{-1}(A)$, missä $A \in \mathrm{P}$.

2. Osoita, että luokat P ja PSPACE ovat suljettuja yhdisteiden, leikkausten ja komplementtien suhteen.

3. Osoita, että luokka NP on suljettu yhdisteiden ja leikkausten suhteen. Luokan ei tiedetä olevan suljettu komplementoinnin suhteen: mihin vaikeuteen törmätään yritettäessä todistaa tätä ominaisuutta?

4. Koska luokan NP ei tiedetä olevan suljettu komplementoinnin suhteen, on mielenkiintoista tarkastella sen duaaliluokkaa

$$\text{co-NP} = \{\Sigma^* \setminus A \mid A \in \mathrm{NP}\}.$$

   Todista seuraavat luokan co-NP ominaisuudet:

   (a) $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP} \cap \text{co-NP}$;
   (b) $\mathrm{NP} \cup \text{co-NP} \subseteq \mathrm{PSPACE}$;
   (c) jos $\mathrm{NP} \neq \text{co-NP}$, niin $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ ja $\mathrm{NP} \neq \mathrm{PSPACE}$;
   (d) kieli A on co-NP-täydellinen, jos ja vain jos kieli $\bar{A} = \Sigma^* \setminus A$ on NP-täydellinen.

5. Funktio $s : N \to N$ on *tilakonstruoituva*, jos jollakin deterministisellä moninauhaisella Turingin koneella M on voimassa: $\mathrm{space}_M(x) = s(|x|)$ kaikilla syötejonoilla x. Todista seuraavat väitteet:

   (a) Funktiot $s(n) = k$ (vakio), $s(n) = n$ ja $s(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil$ ovat tilakonstruoituvia.
   (b) Jos $s_1(n)$ ja $s_2(n)$ ovat tilakonstruoituvia, niin myös $s_1(n) + s_2(n)$, $s_1(n)s_2(n)$ ja $2^{s_1(n)}$ ovat tilakonstruoituvia.
   (c) Jokaisella rekursiivisella funktiolla $r(n)$ on olemassa tilakonstruoituva $s(n) \geq r(n)$.

6. Todista, että jokaisella tilakonstruoituvalla $f(n) \geq \log_2 n$ on voimassa sisältyvyys

$$NSPACE(f(n)) \subseteq \bigcup_{c>0} DTIME(c^{f(n)}).$$

   (*Vihje:* Muodosta verkko, jonka solmut ovat simuloitavan epädeterministisen koneen tilannekuvauksia.)