Tietojenkäsittelyteoria, kevät 2000
Harjoitus 2, to 4.2. klo 10–12 sali MaD381

1. Osoita, luentojen Lauseen 1.11 (ii) nojalla, että kaikilla $k \geq 0$ on $\Delta^0_{k+1} = \mathrm{REC}(\Sigma^0_k)$ (Lause 1.11 (i)).

2. Merkitään kielestä otettujen A äärellisten jonojen muodostamaa kieltä
$$A^* = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \mid n \geq 0,\ x_i \in A \text{ kaikilla } i = 1, \ldots, n\}.$$
Osoita, että jos $B \in \mathrm{RE}$, $\bar{B} \in \text{co-RE}$, niin myös $B^* \in \mathrm{RE}$, $\bar{B}^* \in \text{co-RE}$. (Tämä aputulos, relativoidussa muodossaan, oli keskeisellä sijalla luentojen Lauseen 1.11 (ii) todistuksessa. Tuloksen oikeellisuus on melko helppo todeta tapauksessa $B \in \mathrm{RE}$, mutta tapaus $B \in \text{co-RE}$ vaatii mutkikkaamman ns. pyyhkäisysimuloinnin (engl. dovetailing), jossa ensin simuloidaan haluttua laskentaa tietty määrä askelia yhdellä syötteellä, ja askellaskurin tultua täyteen siirrytään toiseen syötteeseen.)

3. Olkoon $M^{()}_\lambda, M^{()}_0, M^{()}_1, M^{()}_{00}, M^{()}_{01}, \ldots$ vastaava oraakkelikoneiden luettelointi kuin aiemmin on muodostettu standardimallisille Turingin koneille, ja olkoon A jokin aakkoston $\{0,1\}$ kieli. Osoita, että kieli
$$U^A = \{\langle c, x \rangle \mid x \in L(M^A_c)\}$$
kuuluu luokkaan $\mathrm{RE}(A)$, mutta ei luokkaan $\mathrm{REC}(A)$. Päättele tästä, että aritmeettinen hierarkia on ääretön, so. että kaikilla $k \geq 1$ on $\Delta^0_k \subsetneq \Sigma^0_k$ (luentojen Lause 1.6 (ii)), ja siis erityisesti mikään Σ^0_k-täydellinen kieli ei voi kuulua luokkaan Δ^0_k, kun $k \geq 1$.

4. Osoita, että aakkoston $\{0,1\}$ kielten välinen Turing-palautus $\leq_T$ on refleksiivinen ja transitiivinen relaatio. Päättele tästä edelleen, että kielten ratkeavuusasteiden
$$\mathbf{a} = [A]_T = \{B \subseteq \{0,1\}^* \mid B \equiv_T A\}$$
joukossa määritelty relaatio
$$\mathbf{a} \leq \mathbf{b} \quad \text{joss} \quad \exists A \in \mathbf{a},\ B \in \mathbf{b} \text{ s.e. } A \leq_T B$$
on osittainjärjestys, jonka minimialkio on $\mathbf{0} = \mathrm{REC}$. Totea, tehtävän 3 tulokseen nojaten, että asteiden joukossa määritelty ns. *hyppyoperaatio* (engl. jump operation)
$$[A]'_T = [U^A]_T$$
on hyvin määritelty ja tuottaa jokaiselle asteelle $\mathbf{a}$ asteen $\mathbf{a}'$, jolla $\mathbf{a} < \mathbf{a}'$ (so. $\mathbf{a} \leq \mathbf{a}'$, mutta ei $\mathbf{a}' \leq \mathbf{a}$). Mikä on aste $\mathbf{0}'$?

5. Osoita, että kaikki säännölliset kielet kuuluvat luokkaan $\mathrm{DTIME}(n+1) \cap \mathrm{DSPACE}(1)$.

6. Tarkasta Laskennan teoria -monisteen Lauseiden 7.7 ja 7.8 todistuksissa esitetyt diagonalisointiargumentit, joilla osoitetaan että kieli U^k ei kuulu luokkaan $\mathrm{DTIME}(n^k)$ ja kieli U^t ei kuulu luokkaan $\mathrm{DTIME}(t(n))$. Kiinnitä erityistä huomiota todistuksissa väitettyjen aikarajojen pitävyyteen.

Huom.: Luennoijan virkamatkan takia kurssilla ei ole luentoa tiistaina 2.2.