Tietojenkäsittelyteoria, kevät 2000
Harjoitus 11, to 6.4. klo 10–12 sali MaD381

1. Merkitään $\pi_{1:n}$ = luvun π binääriesityksen n ensimmäistä bittiä. Arvioi lausekkeiden $K(\pi_{1:n})$ ja $K(\pi_{1:n}|n)$ arvoa n:n funktiona.

2. Osoita, että $K(x, y) = K(x) + K(y|x) + O(\log_2 K(x, y))$.

3. Osoita, että funktio $K(x)$ ei ole rekursiivinen. (*Vihje:* Sovella lauseen 7.7 (ii) todistusideaa.) Millä aritmeettisen hierarkian tasolla sijaitsee joukko $K^{\mathrm{UP}} = \{\langle x, d\rangle \mid K(x) \leq d\}$? Entä joukko $R = \{x \mid K(x) \geq |x|\}$?

4. Osoita, että kaikilla $x, h \geq 1$ on voimassa: $|K(x+h)-K(x)| = 2\log_2 h+O(1)$. (Tässä on siis samaistettu binäärijonot x ja luonnolliset luvut n vastaavuuden $n = \mathrm{num}(1x)$ välityksellä. Tulos osoittaa, että vaikka funktion $K(x)$ arvo vaihtelee jatkuvasti rajojen $m(x)$ ja $|x| = \lfloor \log_2 x \rfloor$ välissä, niin sen muutosnopeus on melko rauhallinen.)

5. Olkoon A rekursiivisesti lueteltava joukko. Osoita, että jos $x \in A$, $|x| = n$, niin $K(x|n) = \log_2 \|A \cap \{0,1\}^n\| + O(1)$. Päättele tästä, että "epätyypilliset joukot sisältävät vain yksinkertaisia alkioita" siinä mielessä, että jos A on rekursiivisesti lueteltava joukko, jolla $\|A \cap \{0,1\}^n\| = o(2^n)$, niin kaikilla $x \in A$, $x = n$, on voimassa $K(x|n) \leq n - g(n)$, missä $\lim_{n\to\infty} g(n) = \infty$. Arvioi edelleen sellaisten binäärijonojen Kolmogorov-kompleksisuutta, jotka sisältävät vähintään kaksi kertaa niin paljon ykkösiä kuin nollia.

6. Osoita, että on olemassa säännöllisiä kieliä, jotka voidaan tunnistaa n-tilaisella epädeterministisellä automaatilla, mutta joiden tunnistaminen deterministisellä automaatilla vaatii vähintään $\Omega(2^n)$ tilaa. (Vrt. Laskennan teoria, Lauseet 2.1 ja 2.2. *Vihje:* Tarkastele kieliä $L_k = \{x \in \{0,1\}^* \mid x\text{:n } k\text{:nneksi viimeinen bitti on } 1\}$.)

7. Tarkastellaan n solmun täydellisen verkon K_n kaarien värityksiä "sinisiksi" ja "punaisiksi". Annetulla $k \geq 3$ on *Ramseyn luku* $r(k)$ pienin sellainen n, jolla verkko K_n välttämättä sisältää joko "kokonaan sinisen" tai "kokonaan punaisen" k solmun klikin, so. yhtenäisesti väritetyn k solmun täydellisen aliverkon. (Tiedetään, että $r(k)$ on äärellinen kaikilla k, mutta ainoat tarkasti tunnetut arvot ovat $r(3) = 6$ ja $r(4) = 18$.) Todista seuraava alarajatulos (P. Erdös 1947):
$$r(k) \geq k2^{k/2}\left(\frac{1}{e\sqrt{2}} - o(1)\right).$$