Tietojenkäsittelyteoria, kevät 2000
Harjoitus 1, to 27.1. klo 10–12 sali MaD381

Tehtävää 1 lukuunottamatta kaikkien seuraavien tehtävien ratkaisussa saa käyttää hyväksi Churchin-Turingin teesiä, jonka mukaan mikä tahansa intuitiivisesti "mekaaninen" laskurutiini (algoritmi) voidaan toteuttaa myös Turingin koneella. Tunnetuiksi saa olettaa myös Kleenen kvanttorikarakterisoinnin luokalle RE (luentojen Lause 1.1) sekä luokkien RE ja REC Laskennan teoria -monisteen luvussa 6 esitellyt perusominaisuudet.

1. Laadi Turingin kone, joka tunnistaa aakkoston $\{0,1\}$ parillisen pituisten *palindromien* muodostaman kielen $\mathrm{PAL} = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$. (Merkintä w^R tarkoittaa merkkijonoa w takaperin kirjoitettuna, so. jos $w = b_1 b_2 \ldots b_n$, niin $w^R = b_n \ldots b_2 b_1$.) Esitä koneen tilannejonot sen käsitellessä syötteitä 0110 ja 1011.

2. Todista seuraavat aritmeettisen hierarkian kieliluokkien ominaisuudet.
   (a) $\text{co-RE} = \{\forall B \mid B \in \mathrm{REC}\}$.
   (b) Kaikilla $k \geq 0$: jos $A \in \Sigma_k^0$ (Π_k^0), niin $\bar{A} \in \Pi_k^0$ (Σ_k^0).

3. Todista oikeaksi aritmeettisen hierarkian kieliluokkien kvanttorikarakterisointi (luentojen Lemma 1.4): kieli $A \in \Sigma_k^0$, jos ja vain jos on olemassa kieli $B \in \mathrm{REC}$ siten, että kaikilla $x \in \Sigma^*$:
$$x \in A \quad \Leftrightarrow \quad \exists y_1 \forall y_2 \ldots Q y_k (\langle y_1, y_2, \ldots, y_k, x\rangle \in B),$$
missä $Q = \begin{cases} \exists, & \text{jos } k \text{ on pariton,} \\ \forall, & \text{jos } k \text{ on parillinen.} \end{cases}$

4. Todista, että aritmeettisen hierarkian luokilla Σ_k^0, $k \geq 0$, on seuraavat sulkeumaominaisuudet (luentojen Lemmat 1.5 ja 1.7).
   (a) Jos $A, B \in \Sigma_k^0$, niin $A \cup B$, $A \cap B \in \Sigma_k^0$.
   (b) Jos $A \in \Sigma_k^0$, $k \geq 1$, niin $\exists A \in \Sigma_k^0$.
   (c) Jos $A \in \Sigma_k^0$ ja $B \leq_m A$, niin $B \in \Sigma_k^0$.

5. Tutustu Laskennan teoria -monisteen Lauseen 6.11 ja/tai Lauseen 6.12 todistukseen (monisteen ss. 88–92) ja osoita vastaavaa tekniikkaa käyttäen, että kieli
$$\mathrm{TOT} = \{c \mid \text{Turingin kone } M_c \text{ pysähtyy kaikilla syötteillä}\}$$
ei ole rekursiivinen.

6. Määritä, millä aritmeettisen hierarkian tasolla (enintään) sijaitsevat seuraavat joukot:
   (a) $\mathrm{INF} = \{c \mid L(M_c) \text{ on ääretön}\}$;
   (b) $\mathrm{EQUIV} = \{\langle c, c'\rangle \mid L(M_c) = L(M_{c'})\}$;
   (c) $\mathrm{REG} = \{c \mid L(M_c) \text{ on säännöllinen kieli}\}$.

Huom.: Luennoijan virkamatkan takia kurssilla ei ole luentoa tiistaina 2.2.