Johdatus diskreettiin matematiikkaan, syksy 2000
Harjoitus 9, 21.–23.11.

1. Määritä binäärisen symmetrisen kanavan BSC(p) kapasiteetti, kun (a) $p = 0.01$, (b) $p = 0.1$, (c) $p = 0.4$.

2. Osoita, että n-bittisten bittijonojen Hamming-etäisyys $d(x, y)$ on *metriikka* avaruudessa $\{0,1\}^n$, so. että kaikilla $x, y, z \in \{0,1\}^n$ on voimassa:

   (a) $d(x, y) \geq 0$,

   (b) $d(x, y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$,

   (c) $d(x, y) = d(y, x)$,

   (d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ("kolmioepäyhtälö").

   (Näistä ehdoista on tässä tapauksessa tietenkin ainoastaan (d) epätriviaali.)

3. Luettele Hamming-koodin $\mathcal{H}_4$ (4 viestibittiä, 3 pariteettibittiä, yhden virheen korjaus) kaikki koodisanat, kun tarkistusmatriisi on annettu standardijärjestyksessä. ("Standardi" = pariteettibittejä vastaava yksikkömatriisi sijaitsee tarkistusmatriisin oikeassa reunassa.)

4. Osoita, että 7-bittisessä yhden virheen korjaavassa koodissa voi olla enintään 16 koodisanaa, ja koodi $\mathcal{H}_4$ on siten omassa luokassaan maksimaalisen tehokas.

5. Suunnittele yhden virheen korjaava 5-bittinen binäärikoodi, jossa on 4 koodisanaa. Onko koodi tehokkaampi vai vähemmän tehokas kuin Hamming-koodi $\mathcal{H}_4$?

6. Herra K ja neiti Y istuvat iltaa hieman meluisassa ravintolassa, jonka kohinatasoa kuvaa kanava BSC(0.1). Herra K haluaa lähettää neiti Y:lle 4-bittisen viestin "0101".

   (a) Mikä on todennäköisyys, että viesti menee virheettömänä perille, jos herra K ei koodaa sitä millään tavalla?

   (b) Entä jos herra K toistaa viestin 3 kertaa, ja neiti Y valitsee kunkin bitin arvoksi sen, joka esiintyy useimmissa toistoissa? (Tässä tapauksessa siis kahdessa toistossa kolmesta.)

   (c) Entä jos herra K koodaa viestin käyttäen Hamming-koodia $\mathcal{H}_4$? Esitä tässä tapauksessa myös viestin koodattu versio.

7. Dekoodaa luonnollista $\mathcal{H}_4$-koodia käyttäen koodattu, yhden virheen sisältävä merkkijono 1001010. ("Luonnollinen" = tarkistusmatriisin sarakkeet ovat binäärilukuina tulkittuina nousevassa numerojärjestyksessä.) Mikä on vastaava virheetön 4-bittinen viestisana?

Kurssin toinen välikoe pidetään ke 29.11. klo 8–11. Koe kattaa harjoituksissa 6–9 käsitellyt asiat (verkko- ja koodausteoria).