Johdatus diskreettiin matematiikkaan, syksy 2000
Harjoitus 7, 7.–9.11.

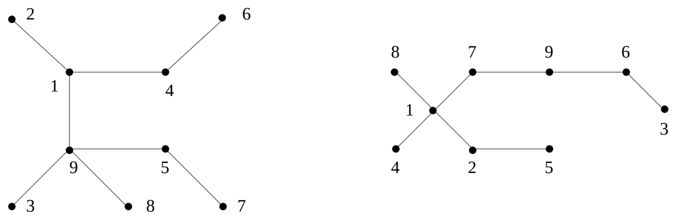
1. Muodosta jokin binääriaakkoston 16-bittinen De Bruijnin jono, so. sellainen 16-merkkinen jono $w \in \{0,1\}^{16}$, joka syklisesti luettuna sisältää kaikki 4-merkkiset jonot $x \in \{0,1\}^4$ osajonoinaan.

2. (a) Piirrä kaikki keskenään ei-isomorfiset 6-solmuiset puut.
   (b) Osoita, että n-solmuisten puiden isomorfiatyyppejä on ainakin e^{n-1}/n^3 kappaletta. (*Ohje:* Sovella Sylvesterin–Cayleyn lausetta ja epäyhtälöä $e(\frac{n}{e})^n \leq n! \leq ne(\frac{n}{e})^n$.)

3. Osoita, että verkko $G = (V, E)$ on puu, jos ja vain jos se on syklitön, mutta minkä tahansa G:stä puuttuvan kaaren lisääminen synnyttää siihen syklin.

4. Todista oikeaksi seuraavat väitteet:
   (a) Jokaisessa vähintään kaksisolmuisessa puussa on ainakin kaksi lehteä.
   (b) Olkoon $G = (V, E)$ mielivaltainen verkko ja $u \in V$ jokin G:n lehti (= solmu, jonka asteluku on 1). Tällöin G on puu, jos ja vain jos verkko $G - u$ (= solmujoukon $V \setminus \{u\}$ virittämä G:n aliverkko) on puu.

5. Muodosta seuraavien puiden Prüfer-koodit:



   Minkä 7-solmuisen puun Prüfer-koodi on (3,1,4,1,5)?

6. *Hyperkuutioverkon* H_n solmuina ovat kaikki n-bittiset binäärijonot $u \in \{0,1\}^n$, ja solmujen u ja v välillä on kaari, jos ja vain jos niitä vastaavat binäärijonot eroavat toisistaan tasan yhdessä kohden.
   (a) Piirrä verkot H_3 ja H_4. Montako solmua on verkossa H_n?
   (b) Millä n:n arvoilla verkko H_n sisältää Eulerin kierroksen?
   (c) Määritä verkon H_n *halkaisija*, so. suurin mahdollinen kahden solmun välinen etäisyys $d(H_n) = \max\{d(u,v) \mid u, v \in H_n\}$. (Solmujen $u, v \in H_n$ välinen *etäisyys* $d(u,v)$ tarkoittaa lyhimmän niitä yhdistävän polun pituutta.)

7. Todista induktiolla n:n suhteen, että jokainen edellisen tehtävän mukainen hyperkuutioverkko H_n, $n \geq 2$, sisältää Hamiltonin kehän. (*Ohje:* Oleta induktiivisesti, että verkko H_n sisältää Hamiltonin polun solmusta $u = 00\ldots0$ solmuun $v = 10\ldots0$. Totea, että kahdesta tällaisesta polusta voidaan yhdistää verkon H_{n+1} samanmuotoinen Hamiltonin polku.) Piirrä em. konstruktion mukaiset verkkojen H_3 ja H_4 Hamiltonin kehät.

   (*Huomautus:* Hyperkuution H_n Hamiltonin kehät vastaavat kokonaislukujen $0, \ldots, 2^n - 1$ ns. *syklisiä Gray-koodeja*, joissa kahden peräkkäisen luvun binääriesitykset poikkeavat aina vain yhdessä bitissä.)