Johdatus diskreettiin matematiikkaan, syksy 2000
Harjoitus 4, 17.–19.10.

1. Portaikossa voi nousta 1 tai 2 askelmaa kerrallaan. Laadi rekursioyhtälö, joka kuvaa montako erilaista tapaa on nousta ylös n-askelmainen portaikko. (*Ohje:* Osita n-askelmaisen portaikon nousutavat sen mukaan, noustaanko 1. askelella 1 vai 2 askelmaa.)

2. Ratkaise seuraavat rekursioyhtälöt karakteristisen polynomien tekniikalla:

   (a)
   $$\begin{cases} t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \\ t_n = 5t_{n-1} - 6t_{n-2}, \quad n \geq 2; \end{cases}$$

   (b)
   $$\begin{cases} a_0 = 1, \\ a_n = 2a_{n-1} + n, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

3. Olkoon $A(x)$ lukujonon $\langle a_k \rangle = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ generoiva funktio ja $c \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{N}$ vakioita. Minkä lukujonojen generoivia funktioita ovat seuraavat:

   (a) $G(x) = A(cx)$,
   (b) $H(x) = A(x^p)$,
   (c) $A_0(x) = \frac{1}{2}(A(x) + A(-x))$ ja $A_1(x) = \frac{1}{2}(A(x) - A(-x))$?

4. Muodosta seuraavien lukujonojen generoivat funktiot:

   (a) $\langle 0, 0, 0, 0, -6, 6, -6, 6, -6, \ldots \rangle$;
   (b) $\langle 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots \rangle$;
   (c) $\langle 1, 2, 1, 4, 1, 8, \ldots \rangle$;
   (d) $\langle 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \ldots \rangle$.

5. Newtonin (yleistetyn) binomikaavan mukaan on kaikilla $r \in \mathbf{R}$ ja $|x| < 1$ voimassa:
   $$(1 + x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k,$$
   missä yleistetty binomikerroin $\binom{r}{k}$ määritellään:
   $$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}, \qquad r \in \mathbf{R},\ k \in \mathbf{N}.$$
   Lisäksi määritellään $\binom{r}{k} = 0$, kun $k < 0$. Todista seuraavat yleistettyjen binomikertoimien ominaisuudet:

   (a) $\binom{n}{k} = 0$, kun $n \in \mathbf{N}$ ja $k > n$;
   (b) $\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$, kun $n \in \mathbf{N}$;
   (c) $\binom{-1/2}{k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}}\binom{2k}{k}$, $\binom{1/2}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k}(2k-1)}\binom{2k}{k}$.

6. Minkä lukujonojen generoivia funktioita ovat $\frac{1}{(1-x)^2}$ ja $\frac{x}{(1-x)^2}$? (*Vihje:* Sovella edellisen tehtävän tuloksia.)

7. Ratkaise tehtävän 2(b) rekursioyhtälö generoivien funktioiden avulla.