**Johdatus diskreettiin matematiikkaan, syksy 2000**
Harjoitus 1, 26.–28.9.

1. *Fibonaccin luvut* $F_n$, $n \geq 0$, määritellään kaavoilla $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, kun $n \geq 2$. (Lukusarjan ensimmäiset luvut ovat siis 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) Todista induktiolla indeksin $n$ suhteen, että kaikilla $n \geq 2$ on voimassa

   $$\phi^{n-2} \leq F_n \leq \phi^{n-1},$$

   missä luku $\phi$ on ns. "kultaisen leikkauksen suhde" $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

2. Olkoon $A = \{0, 1, 2\}^2$. Piirrä Hasse-kaavio järjestysrelaatiosta $\preceq \subseteq A \times A$, missä

   $$(r, s) \preceq (r', s') \qquad \text{joss} \qquad r \leq r' \text{ ja } s \leq s'.$$

   (Tässä siis relaatio $\leq$ on kokonaislukujen tavanomainen järjestys.) Onko vastaava relaatio, jonka määrittelyssä on "ja"-sana korvattu "tai"-sanalla, myös osittainjärjestys?

3. (a) Luettele kaikki joukon $\{a, b, c\}$ ekvivalenssirelaatiot (ositukset).
   (b) Piirrä kaikkien joukon $\{a, b, c\}$ järjestysrelaatioiden (osittainjärjestysten) Hasse-kaaviot.

4. Kuvaile yleisesti järjestettyjen joukkojen $(\mathcal{P}(\{1, 2, \ldots, n\}), \subseteq)$ ja $(\{2, 3, 4, \ldots, n\}, |)$ rakennetta. (Merkintä "|" tarkoittaa tässä kokonaislukujen jaollisuusrelaatiota: $m|n$, jos $m$ on $n$:n tekijä.) Mitkä ovat järjestysten minimialkiot? Annetun alkion välittömät seuraajat? Miten pitkä voi kummassakin järjestyksessä olla maksimaalisen pitkä *ketju*, so. täydellisesti järjestetty alkiojono $a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_k$?

5. Osoita, että jokainen äärellinen järjestetty joukko sisältää maksimaalisen, mutta ei välttämättä suurinta alkiota.

6. Luonnollisten lukujen induktioperiaatteen mukaan mille tahansa luonnollisten lukujen ominaisuudelle $P$ on voimassa, että jos $P(0)$ on tosi ja implikaatio $P(n-1) \Rightarrow P(n)$ on tosi kaikilla $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, niin $P(n)$ on tosi kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Todista periaate oikeaksi lähtien tiedoista, että luonnollisten lukujen suuruusjärjestys $(\mathbf{N}, \leq)$ on hyvinjärjestys, jolla on pienin alkio 0, ja lisäksi jokaisella alkiolla $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ on välitön edeltäjä $n - 1$.