T-79.5201 Diskreetit rakenteet
Generoivat funktiot

Pekka Orponen
Teknillinen korkeakoulu
Tietojenkäsittelytieteen laitos

Lukijalle

Tämän moniste perustuu syyslukukauden 2001 muistiinpanoihini Teknillisen korkeakoulun Tietojenkäsittelyteorian laboratorion kurssilta "Diskreetit rakenteet". Tämän vaihtuvasisältöisen, kahden opintoviikon laajuisen kurssin aihepiirinä tuolla luennointikerralla olivat generoivat funktiot.

Muistiinpanojen työlään LaTeX-ladonnan on tuottanut kurssille osallistunut TkL[1] Satu Elisa Schaeffer, mistä olen hänelle erittäin kiitollinen. Kaikki tähän tarkastettuun versioon jääneet virheet ja puutteellisuudet ovat tietenkin minun syytäni.

Espoossa, 14. syyskuuta 2004

Pekka Orponen

Em. kurssia syyslukukaudella 2004 toisen kerran luennoidessani olen matkan varrella korjannut joukon monisteesta löytyneitä asia- ja ladontavirheitä, selkeyttänyt hieman joidenkin asioiden käsittelyä sekä täydentänyt muutamia laskuesimerkkejä.

Espoossa, 11. tammikuuta 2005

Pekka Orponen

Kurssia syyslukukausilla 2006 ja 2008 uudelleen luennoidessani olen edelleen tehnyt monisteeseen joitakin pieniä korjauksia ja parannuksia. Keskeisiltä osin sen sisältö on kuitenkin muuttumaton.

Espoossa, 3. joulukuuta 2008

Pekka Orponen

[1] Sittemmin TkT.

Sisältö

Luku 1

Johdanto

Olkoon $a = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle \in \mathbb{C}^\infty$ jokin lukujono. Jonon a (tavallinen) *generoiva funktio* on kompleksimuuttujan z a-kertoimisen potenssisarjan määrittelemä funktio:

$$a(z) \doteq a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = \sum_{k\geq 0} a_k z^k.$$

Merkintää käytetään, vaikka sarja ei suppenisikaan muualla kuin origossa. Asiaan palataan tuonnempana.

Esimerkkejä:

(i) Jonon $\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle$ generoiva funktio on

$$a(z) = \sum_{k\geq 0} 1 \cdot z^k = \sum_{k\geq 0} z^k = \frac{1}{1-z}$$

(tämä suppenee kun $|z| < 1$).

(ii) Jonon $\langle 1, 2, 4, 8, \ldots \rangle$ generoiva funktio on

$$a(z) = \sum_{k\geq 0} 2^k z^k = \sum_{k\geq 0} (2z)^k = \frac{1}{1-2z}$$

(tämä suppenee kun $|z| < \frac{1}{2}$).

(iii) Jonon $\langle \binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n} \rangle$ generoiva funktio on

$$a(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k = (1+z)^n.$$

Generoivien funktioiden merkitys on siinä, että ne luovat *yksikäsitteisen vastaavuuden* mielivaltaisten (suppenemisen huomioonottaen riittävän hitaasti kasvavien) lukujonojen ja origossa analyyttisten funktioiden välille:

Lause 1.1. (Taylor et al.) Olkoon $a(z)$ jokin origossa analyyttinen funktio, ja sen potenssisarjaesitys $a(z) = \sum_{k\geq 0} a_k z^k$ (suppenee kun $0 < |z| < r$, $r > 0$). Tällöin sarjan kertoimet on *yksikäsitteisesti määrätty*; ne saadaan esimerkiksi kaavasta $a_k = \frac{1}{k!} a^{(k)}(0)$. (Merkintä: $a^{(k)}$ = funktion a k:s derivaatta.) □

Termin z^k kertoimelle funktion $a(z)$ potenssisarjassa käytetään myös merkintää $[z^k]a(z) = a_k$, ja tästä yleistäen vielä "termin $\beta_k z^k$" kertoimelle merkintää $[\beta_k z^k]a(z) = \beta_k^{-1} a_k$, missä β_k on mielivaltainen z:sta riippumaton tekijä.

Esimerkki: Generoivien funktioiden käyttö rekursioyhtälöiden ratkaisemiseen.

Fibonaccin luvut määritellään yhtälöllä

$$\begin{cases} f_0 &= 0, \\ f_1 &= 1, \\ f_k &= f_{k-1} + f_{k-2}, \quad k \geq 2 \end{cases}$$

Muodostetaan jonon $\langle f_0, f_1, f_2, \ldots \rangle$ generoiva funktio:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k\geq 0} f_k z^k \\ &= 0 + 1 \cdot z + \sum_{k\geq 2} f_k z^k \\ &= 0 + z + \sum_{k\geq 2} (f_{k-1} + f_{k-2}) z^k \\ &= z + \sum_{k\geq 2} f_{k-1} z^k + \sum_{k\geq 2} f_{k-2} z^k \\ &= z + z \sum_{k\geq 0} f_k z^k + z^2 \sum_{k\geq 0} f_k z^k \\ &= z + z f(z) + z^2 f(z) \end{aligned}$$

Ratkaisemalla yhtälö saadaan $f(z) = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{z}{-(\alpha-z)(\hat{\alpha}-z)} = \frac{z}{(1-\varphi z)(1-\hat{\varphi} z)}$ joillakin $\varphi, \hat{\varphi}$.

Ratkaistaan $\varphi, \hat{\varphi}$:

$$\begin{cases} \varphi\hat{\varphi} &= -1 \\ \varphi + \hat{\varphi} &= 1, \end{cases}$$

josta saadaan $\varphi - \frac{1}{\varphi} = 1 \Rightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, josta edelleen

$$\begin{cases} \varphi &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \hat{\varphi} &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Osamurtokehitelmälauseen (Lause 1.2, s. 3) mukaan voidaan määrätä vakiot A ja B siten, että

$$f(z) = \frac{z}{(1-\varphi z)(1-\hat{\varphi} z)} \equiv \frac{A}{1-\varphi z} + \frac{B}{1-\hat{\varphi} z}.$$

Ratkaistaan tästä A ja B:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{z \to \frac{1}{\varphi}} \frac{z}{1-\hat{\varphi} z} &= \frac{1/\varphi}{1-\hat{\varphi}/\varphi} &= \frac{1}{\varphi - \hat{\varphi}} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ B &= \lim_{z \to \frac{1}{\hat{\varphi}}} \frac{z}{1-\varphi z} &= \frac{1/\hat{\varphi}}{1-\varphi/\hat{\varphi}} &= \frac{1}{\hat{\varphi} - \varphi} &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Generoiva funktio voidaan siten kirjoittaa muodossa

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\varphi z} - \frac{1}{1-\hat{\varphi} z}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k\geq 0} \varphi^k z^k - \sum_{k \geq 0} \hat{\varphi}^k z^k\right) \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^k - \hat{\varphi}^k) z^k, \end{aligned}$$

mistä saadaan Lauseen 1.1 mukaan yksikäsitteinen ratkaisu

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^k - \hat{\varphi}^k\right), k \geq 0.$$

Lause 1.2. (Rationaalifunktion osamurtokehitelmä) Olkoon $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ missä $P(z)$ ja $Q(z)$ ovat z:n polynomeja siten, että $\deg P < \deg Q$. Olkoon edelleen

$$Q(z) = (z-q_1)^{d_1} \cdot (z-q_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (z-q_m)^{d_m}$$

missä $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{C}$ ovat polynomin $Q(z)$ eri juuret. Tällöin on olemassa yksikäsitteiset vakiot $c_i \in \mathbb{C}$ siten, että

$$R(z) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{d_i} \frac{c_{ij}}{(z-q_i)^j}\right).$$

□

Esimerkki: Osamurtokehitelmiä.

(i) $\frac{1}{(1-2z)z^2} = \frac{4}{1-2z} + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}$

(ii) $\frac{1}{z(1+z^2)} = \frac{1}{z(z-i)(z+i)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-i} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+i} = \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+1}$

1.1 Funktioteorian käyttö generoivien funktioiden analysoinnissa

Aina ei ole mahdollista ratkaista annetun generoivan funktion kerroinjonoa suljetussa muodossa. Tällöin voidaan käyttää kompleksianalyysin tekniikoita kerroinjonon asymptoottisen käyttäytymisen arviointiin.

1.1.1 Menetelmä 1: Suppenemissäteen käyttö

Olkoon $a(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ origossa analyyttinen funktio. Tällöin a:n määrittämällä potenssisarjalla $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ on nollasta poikkeava *suppenemissäde*:

$$\begin{aligned} r &= \sup\{\rho : \sum_{k \geq 0} a_k z^k \text{ suppenee } \forall z \in \mathbb{C} \text{ s.e. } |z| < \rho\} \\ &= \inf\{|z| : \sum_{k\geq 0} a_k z^k \text{ hajaantuu pisteessä } z \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

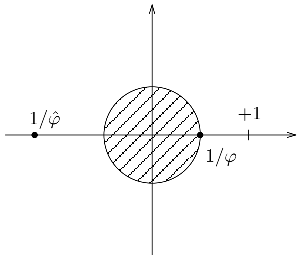
Itse asiassa suppenemissäde saadaan suoraan sarjan kertoimista: $r = \frac{1}{\lambda}$ jossa $\lambda = \lim_{k\to\infty} \sup |a_k|^{1/k}$. Tämä nähdään vertaamalla sarjaa $\sum_{k \geq 0} a_k z^k$ geometriseen sarjaan $\sum_{k\geq 0} \lambda^k z^k$.

Lause 1.3. Olkoon sarjan $\sum_{k\geq 0} a_k z^k$ suppenemissäde $r > 0$. Tällöin on kaikilla $\epsilon > 0$ voimassa:

(i) $|a_k| \leq \left(\frac{1+\epsilon}{r}\right)^k$ melkein kaikilla k (so. kaikilla paitsi äärellisen monella)

(ii) $|a_k| \geq \left(\frac{1-\epsilon}{r}\right)^k$ melkein kaikilla k.

□



Esimerkki: Fibonaccin luvut.

Generoiva funktio tässä tapauksessa on:

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} f_k z^k = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{z}{(1 - \varphi z)(1 - \hat{\varphi} z)},$$

missä $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$, $\hat{\varphi} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$. $f(z)$:n ainoat "erikoispisteet" ovat $z = \frac{1}{\varphi} \approx 0.618$ ja $z = \frac{1}{\hat{\varphi}} \approx -1.618$. Nyt siis generoivan funktion suppenemissäde on $r = 1/\varphi$. Lauseen 1.3 nojalla $|f_k| \leq ((1 + \epsilon)\varphi)^k$ melkein kaikilla k ja myös $|f_k| \geq ((1 - \epsilon)\,\varphi)^k$ niinikään melkein kaikilla k.

1.1.2 Menetelmä 2: Erikoispisteiden käyttö

Olkoon $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $\deg P < \deg Q$, rationaalifunktio ja edelleen

$$Q(z) = (z - q_1)^{d_1} \cdot (z - q_2)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (z - q_m)^{d_m},$$

jossa q_i:t ovat erisuuruisia. Tällöin kukin q_i on R:n *kertalukua* d_i oleva *napa*.

Lause 1.4. Olkoon jonon $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ generoiva funktio $a(z)$ rationaalifunktio, jonka navat ovat $q_1, \ldots, q_m$ ja näiden kertaluvut $d_1, \ldots, d_m$. Tällöin on

$$a_k = \sum_{i=1}^{m} A_i(k) \cdot \left(\frac{1}{q_i}\right)^k,$$

missä kukin $A_i(k)$ on astetta $d_i - 1$ oleva polynomi. (Erityisesti siis ensimmäisen kertaluvun eli *yksinkertaisen* navan tapauksessa $A_i =$ vakio.) $\square$

Esimerkki: Fibonaccin luvut.

Tässä tapauksessa

$$f(z) = \frac{z}{(1 - \varphi z)(1 - \hat{\varphi} z)} = \frac{-z}{(z - \frac{1}{\varphi})(z - \frac{1}{\hat{\varphi}})}.$$

(Huomaa, että $\varphi\hat{\varphi} = -1$.) Lauseesta 1.4 seuraa nyt $f_k = a_1 \varphi^k + a_2 \hat{\varphi}^k$, missä $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ ovat vakioita. Reunaehtojen $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ avulla voidaan ratkaista $a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ja $a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Luku 2

Formaalit potenssisarjat

Generoivia funktioita käsiteltäessä ei yleensä kiinnitetä huomiota muodostettujen sarjojen suppenemiseen. Syy tähän on se, että useimmat generoivien funktioiden operaatiot voidaan perustaa *formaalien potenssisarjojen* teoriaan, missä potenssisarjoja tarkastellaan vain äärettömien lukujonojen vaihtoehtoisena merkintätapana.

Merkitään $\mathbb{C}^\infty = \{\langle a_0, a_1, a_2, \ldots\rangle \mid a_i \in \mathbb{C}, \forall i = 0, 1, 2, \ldots\}$ ja määritellään tässä joukossa jonojen yhteen- ja kertolasku:

$$\begin{aligned} \langle a_0, a_1, \ldots\rangle + \langle b_0, b_1, \ldots\rangle &= \langle a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots\rangle \\ \langle a_0, a_1, \ldots\rangle \cdot \langle b_0, b_1, \ldots\rangle &= \underbrace{\langle a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \ldots\rangle}_{\text{Ns. Cauchy- eli konvoluutiotulo}} \end{aligned}$$

Merkitään lyhyesti $\langle a_k\rangle + \langle b_k\rangle = \langle a_k + b_k\rangle$ ja vastaavasti $\langle a_k\rangle \cdot \langle b_k\rangle = \left\langle \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} \right\rangle$.

Struktuuri $(\mathbb{C}^\infty, +, \cdot, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ on nyt *kommutatiivinen rengas*, jossa on summan nolla-alkio $\mathbb{0} = \langle 0, 0, 0, \ldots\rangle$ ja tulon ykkösalkio $\mathbb{1} = \langle 1, 0, 0, \ldots\rangle$.

Jonoa $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots\rangle \in \mathbb{C}^\infty$ voidaan merkitä myös $a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \ldots$ eli $\sum_{k\geq 0} a_kX^k$, missä “potenssit” X^k ovat vain formaaleja paikanmerkkejä, eivät lukuja tms.

Näillä merkinnöillä edellä määritellyt lukujonojen summa- ja tulosäännöt ovat yhteensopivia tavanomaisten polynomien ja potenssisarjojen laskusääntöjen kanssa, ja joukkoa $\mathbb{C}^\infty$ merkitään tällöin $\mathbb{C}[\![X]\!]$. Struktuuri $(\mathbb{C}[\![X]\!], +, \cdot, \mathbb{0}, \mathbb{1})$ on renkaan $\mathbb{C}$ (*formaali*) *potenssisarjarengas*. (Vrt. polynomirengas $\mathbb{C}[X]$, joka on äärellisiä $\mathbb{C}$-jonoja vastaava struktuuri.)

Kannattaa huomata, että kerroinrenkaaksi voidaan tilanteen mukaan valita jokin muukin, jolloin merkitään vastaavasti $\mathbb{Z}[\![X]\!]$, $\mathbb{Q}[\![X]\!]$, $\mathbb{R}[\![X]\!]$, tms. Seuraavassa kuitenkin tarkastellaan yleensä rengasta $\mathbb{C}[\![X]\!]$.

Kerroinrengas $\mathbb{C}$ voidaan upottaa renkaaseen $\mathbb{C}[\![X]\!]$ samaistuksella

$$a \to \langle a, 0, 0, \ldots\rangle = aX^0.$$

Selvästi jos $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, niin jonolla $aX^0 = \langle a, 0, 0, \ldots\rangle$ on käänteisalkio $a^{-1}X^0 = \langle a^{-1}, 0, 0, \ldots\rangle$ siten, että $aX^0 \cdot a^{-1}X^0 = \mathbb{1}$. Entä muiden jonojen kääntyvyys?

Lause 2.1. Jonolla $A = \langle a_0, a_1, \ldots\rangle \in \mathbb{C}[\![X]\!]$ on käänteisalkio $B = \langle b_0, b_1, \ldots\rangle$, jos ja vain jos $a_0 \neq 0$. (Tällöin merkitään $B = A^{-1}$.)

Todistus. Oletetaan, että $a_0 \neq 0$. Tällöin jono $B = \langle b_k\rangle$ määräytyy yksikäsitteisesti seuraavista ehdoista:

$$\begin{array}{rclcrcl} a_0b_0 &=& 1 &\Rightarrow& b_0 &=& a_0^{-1} \\ a_0b_1 + a_1b_0 &=& 0 &\Rightarrow& b_1 &=& -a_0^{-1} \cdot a_1b_0 \\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 &=& 0 &\Rightarrow& b_2 &=& -a_0^{-1} \cdot (a_1b_1 + a_2b_0) \\ && \vdots &&&& \\ a_0b_k + \sum_{j=1}^{k} a_jb_{k-j} &=& 0 &\Rightarrow& b_k &=& -a_0^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{k} a_jb_{k-j} \end{array}$$

Kääntäen nähdään, että jos $a_0 = 0$, niin kääntyvyysehtoa $a_0 \cdot b_0 = 1$ ei voida täyttää millään $b_0 \in \mathbb{C}$. $\square$

Esimerkki: Määritellään potenssisarja $(1 - X)^{-1}$.

(1) potenssisarja $(1 - X) = \langle \overbrace{1}^{a_0}, \overbrace{-1}^{a_1}, 0, 0, \ldots\rangle$;

(2) Lauseen 2.1 todistuksen nojalla on $b_0 = a_0^{-1} = 1$ ja kaikilla $k \geq 1$ pätee

$$b_k = -a_0^{-1} \cdot (a_1\, b_{k-1} + a_2\, b_{k-2} + \ldots + a_k\, b_0),$$

johon sijoittamalla $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ ja $a_k = 0, k \geq 2$, saadaan $b_k = -1 \cdot (-b_{k-1} + 0 + 0 + \ldots) = b_{k-1}$;

(3) siten on $(1 - X)^{-1} = \langle 1, 1, 1, \ldots\rangle = \sum_{k\geq 0} X^k$ (vrt. geometrisen sarjan summakaava).

Esimerkki: Newtonin binomikaava.

Olkoon $n \geq 0$ ja merkitään $(1-X)^{-n} \triangleq ((1-X)^{-1})^n$. Tällöin edellisen esimerkin nojalla voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}(1-X)^{-n} &= \underbrace{(1+X+X^2+\dots)(1+X+X^2+\dots)\dots(1+X+X^2+\dots)}_{n \text{ kpl}} \\ &= \sum_{k\geq 0}\binom{n+k-1}{k}X^k = \sum_{k\geq 0}\binom{n-1+k}{n-1}X^k.\end{aligned}$$

Saatiin siis ns. Newtonin binomikaavan (ks. alla) formaali vastine.

Kertaus: Newtonin binomikaava analyysissä

Lause 2.2. Kaikilla $x, y, r \in \mathbb{C}$ on voimassa

$$(x+y)^r = \sum_{k\geq 0}\binom{r}{k}x^{r-k}y^k,$$

missä *yleistetty binomikerroin* $\binom{r}{k}$, $r \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, määritellään

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}. \qquad \square$$

Erityisesti tapauksessa $r = -n$, $n \in \mathbb{N}$, saadaan

$$\begin{aligned}\binom{-n}{k} &= \frac{(-n)(-n-1)\dots(-n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \cdot \frac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k\binom{n+k-1}{k},\end{aligned}$$

ja siten

$$(1-z)^{-n} = \sum_{k\geq 0}\binom{-n}{k}(-z)^k = \sum_{k\geq 0}\binom{n+k-1}{k}z^k = \sum_{k\geq 0}\binom{k+n-1}{n-1}z^k.$$

Samaan tapaan kuin edellisissä esimerkeissä voidaan todistaa kaikkien tavanomaisten potenssisarjojen algebrallisten manipulaatioiden formaalit vastineet:

Potenssisarjojen $F, G \in \mathbb{C}[\![X]\!]$, G kääntyvä, *osamäärä* määritellään seuraavasti: $\frac{F}{G} = FG^{-1}$. Potenssisarjan $F = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ formaali *derivaatta* ja *integraali*

määritellään puolestaan seuraavasti:

$$\begin{aligned}F' = \mathrm{D}\,F &\triangleq \sum_{k\geq 0}(k+1)a_{k+1}X^k \\ \textstyle\int F &\triangleq \sum_{k\geq 1}\frac{a_{k-1}}{k}X^k\end{aligned}$$

Näillä määritelmillä kaikki tavanomaiset derivointi- ja integrointisäännöt ovat luonnollisesti voimassa.

Varoitus: Mielivaltaisten potenssisarjojen *kompositio* ei välttämättä ole hyvin määritelty. Vaatimuksena on, että koska formaalien sarjojen konvergenssitarkasteluja ei haluta tai voida tehdä, täytyy yhdistetyn sarjan jokaisen kertoimen olla *äärellisesti määrätty* (ks. seuraava esimerkki).

Esimerkki: Kompositio.

Olkoon esimerkiksi $F(Y) = \sum_{n\geq 0} a_n Y^n$ ja $G(X) = 1 + X$. Tällöin voitaisiin yrittää määrittää kompositiota $F(G(X))$ seuraavasti:

$$\begin{aligned}\text{“}F(G(X))\text{”} &= \text{“}F(1+X)\text{”} = \sum_{n\geq 0} a_n(1+X)^n \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n\Bigl(\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}X^k\Bigr) = \sum_{k\geq 0}\Bigl(\sum_{n\geq 0}\binom{n}{k}a_n\Bigr)X^k.\end{aligned}$$

Monomin X^k kerrointa ei siis voi määrätä formaalisti, vaan se riippuu äärettömän sarjan $\sum_{n\geq 0}\binom{n}{k}a_n$ suppenemisesta.

Yleisesti on äärettömän monen potenssisarjan $F_0, F_1, F_2, \dots$ *summa* $\sum_{n\geq 0} F_n$ hyvin määritelty, jos ja vain jos sarjojen $F_n = \langle a_k^{(n)}\rangle$ kertoimilla on ominaisuus

$$(\star) \quad \forall k\, \exists n_k \text{ siten, että } n \geq n_k \rightarrow a_k^{(n)} = 0.$$

Tämä tarkoittaa, että summan $\sum F_n$ kukin kerroin $a_k = \sum_n a_k^{(n)}$ on äärellisesti määrätty.

Jos $F_0, F_1, F_2, \dots$ on jono potenssisarjoja siten, että summa $\sum F_n$ on hyvin määritelty, niin on helppo nähdä, että

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\Bigl(\sum_{n\geq 0}F_n\Bigr) &= \sum_{n\geq 0}\mathrm{D}\,F_n \\ \int\Bigl(\sum_{n\geq 0}F_n\Bigr) &= \sum_{n\geq 0}\int F_n.\end{aligned}$$

Edelleen voidaan todeta, että jos sarjakompositiossa $F(G(X))$ "sisäsarjan" $G(X)$ vakiotermi on 0, eli jos sarja on muotoa $G(X) = b_1X + b_2X^2 + \ldots$ (eli tavallaan "$G(0) = 0$"), niin jono $G^0 = 1, G, G^2, G^3, \ldots$ täyttää ehdon $(\star)$ ja voidaan määritellä

$$(\star\star)\quad F(G(X)) \;=\; \sum_{k\geq 0} a_k(G(X))^k, \quad \text{kun} \quad F(Y) = \sum_{k\geq 0} a_k Y^k.$$

Komposition $F(G(X))$ kertoimet ovat äärellisesti määrätyt myös jos $a_k \neq 0$ vain äärellisen monelle k, eli silloin jos F on polynomi.

Nyt voidaan kysyä milloin potenssisarjalla F on *käänteissarja* G siten, että $F(G(X)) = G(F(X)) = X$?

Lause 2.3. Olkoon $F = \sum_{k\geq 1} a_k X^k$ potenssisarja, jolla $a_0 = 0$ ja $a_1 \neq 0$. Tällöin on olemassa potenssisarja $G = \sum_{n\geq 1} b_n X^n$ jolla $b_0 = 0$ ja $b_1 \neq 0$, ja jolle $F(G(X)) = X$. Merkitään $G = F^{[-1]}$.

Todistus. Sarjan G kertoimet määräytyvät yksikäsitteisesti kompositioyhtälöstä

$$F(G(X)) = X \iff \sum_{k\geq 1} a_k \left(\sum_{j\geq 1} b_j \cdot X^j \right)^k = X.$$

- 1. asteen termille $[X^1]$ saadaan $a_1 \cdot b_1 = 1 \Rightarrow b_1 = a_1^{-1}$
- muille asteluvuille $[X^n]$, $n > 1$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k\geq 1,\\ j_1+\ldots+j_k=n}} b_{j_1}\cdot\ldots\cdot b_{j_k} = 0 \\
\iff\quad & a_1 b_n + \sum_{k=2}^{n} a_k \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k\geq 1,\\ j_1+\ldots+j_k=n}} b_{j_1}\cdot\ldots\cdot b_{j_k} = 0 \\
\iff\quad & b_n = -a_1^{-1}\left(\sum_{k=2}^{n} a_k \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k\geq 1,\\ j_1+\ldots+j_k=n}} b_{j_1}\cdot\ldots\cdot b_{j_k} \right).
\end{aligned}$$

□

Ns. *Lagrangen-Bürmannin inversiokaavasta* (Lause 4.2, s. 26) saadaan elegantimpi tapa määrittää sarjan $G = F^{[-1]}$ kertoimet. Asiaan palataan.

Esimerkki: Eksponentti- ja logaritmisarjat.

Määritellään potenssisarja

$$\operatorname{Exp}(X) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} X^n = \langle 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \ldots \rangle.$$

Tällöin sarja $F(X) = \operatorname{Exp}(X) - 1$ toteuttaa Lauseen 2.3 ehdot, joten sillä on käänteissarja $G(X) \triangleq \operatorname{Ln}(1+X)$. Voidaan osoittaa, että

$$\operatorname{Ln}(1+X) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n.$$

Määritellään vielä potenssisarjojen murtopotenssit Newtonin yleisen binomisarjan mukaisesti (Lause 2.2, s. 9): jos $r \in \mathbb{C}$, niin asetetaan

$$(1+X)^r \triangleq \sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} X^k,$$

missä $\binom{r}{k}$ on Lauseen 2.2 yhteydessä määritelty yleistetty binomikerroin.

Tämä ja muut em. formaalit määritelmät "toimivat oikein" tavanomaisten algebrallisten laskusääntöjen suhteen.

Esimerkki: Laskusääntöjen soveltaminen.

$$\begin{aligned}
(1+X)^r(1+X)^s &= \left(\sum_{k\geq 0} \binom{r}{k} X^k \right) \left(\sum_{j\geq 0} \binom{s}{j} X^j \right) \\
&= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} \right) X^n \\
&= \sum_{n\geq 0} \binom{r+s}{n} X^n \\
&= (1+X)^{r+s}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}\operatorname{Ln}(1+X) &= \mathrm{D}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n \right) \\
&= \sum_{n\geq 1} (-1)^{n+1} X^{n-1} \\
&= \sum_{n\geq 0} (-1)^n X^n \\
&= (1+X)^{-1}.
\end{aligned}$$

Luku 3

Tavalliset ja eksponentiaaliset generoivat funktiot

Palataan potenssisarjoissa yksinkertaisempaan merkintään: $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$.

Sarjat voidaan tulkita tilanteen mukaan joko formaalisti ($f \in \mathbb{C}[\![z]\!]$) tai analyyttisesti ($f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$).

Annettuun lukujonoon $a = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle \in \mathbb{C}^\infty$ voidaan liittää potenssisarja kahdella (itse asiassa useammallakin) tavalla:

- *tavallinen* generoiva funktio (tgf): $a(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$
- *eksponentiaalinen* generoiva funktio (egf): $\hat{a}(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$

Näillä on hieman erilaiset kombinatoriset ominaisuudet; valinta riippuu tilanteesta. (Esimerkkejä seuraa.)

3.1 Generoivien funktioiden yhdistämissääntöjä

	Jono	Tavallinen g.f.	Eksponentiaalinen g.f.
1.	$c_n = a_n \pm b_n$	$c(z) = a(z) \pm b(z)$	$\hat{c}(z) = \hat{a}(z) \pm \hat{b}(z)$
2.	$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$	$c(z) = a(z)b(z)$	
3.	$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$		$\hat{c}(z) = \hat{a}(z)\hat{b}(z)$
4.	$c_n = a_{n-1}$ $(c_0 = 0)$	$c(z) = za(z)$	$\hat{c}(z) = \int \hat{a}(z)\, dz$
5.	$c_n = a_{n+1}$	$c(z) = \frac{a(z) - a(0)}{z}$	$\hat{c}(z) = \mathrm{D}\, \hat{a}(z)$
6.	$c_n = na_n$	$c(z) = z\, \mathrm{D}\, a(z)$	$\hat{c}(z) = z\, \mathrm{D}\, \hat{a}(z)$
7.	$c_n = \frac{a_n}{n}$	$c(z) = \int \frac{a(z) - a(0)}{z}\, dz$	$\hat{c}(z) = \int \frac{\hat{a}(z) - \hat{a}(0)}{z}\, dz$

Esimerkki: Fibonaccin luvut.

Määrittely rekursioyhtälönä: $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0$, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$.

- Ratkaisu tavallisella generoivalla funktiolla:

$$\begin{aligned} f_n &\leftrightarrow_{\mathrm{tgf}} f(z) \\ f_{n+1} &\leftrightarrow_{\mathrm{tgf}} \frac{f(z)}{z} \\ f_{n+2} &\leftrightarrow_{\mathrm{tgf}} \frac{f(z) - z}{z^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \frac{f(z) - z}{z^2} - \frac{f}{z} - f &= 0 \\ \overset{z \neq 0}{\iff} \quad f - z - fz - fz^2 &= 0 \\ \iff \quad f(1 - z - z^2) &= z \\ \iff \quad f &= \frac{z}{1 - z - z^2} \\ &= \frac{z}{(1 - \varphi z)(1 - \hat{\varphi} z)}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\iff f(z) = \sum_{n\geq 0} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \hat{\varphi}^n)}_{f_n} z^n, \text{ jossa } \begin{array}{rcl} \varphi & = & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \hat{\varphi} & = & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array}$$

- Ratkaisu eksponentiaalisella generoivalla funktiolla:

$$\begin{array}{lll} f_n & \leftrightarrow_{\text{egf}} & \hat{f}(z) \\ f_{n+1} & \leftrightarrow_{\text{egf}} & \hat{f}'(z) \\ f_{n+2} & \leftrightarrow_{\text{egf}} & \hat{f}''(z) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \therefore\ \hat{f}'' - \hat{f}' - \hat{f} = 0 & \iff & \hat{f} = c_1 e^{\varphi z} + c_2 e^{\hat{\varphi} z} \\ \hat{f}(0) = f_0 = 0 & \Longrightarrow & c_1 + c_2 = 0 \\ \hat{f}'(0) = f_1 = 1 & \Longrightarrow & c_1\varphi + c_2\hat{\varphi} = 1 \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} c_1 & = & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ c_2 & = & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \therefore & \hat{f}(z) & = & \frac{1}{\sqrt{5}}\left(e^{\varphi z} - e^{\hat{\varphi} z}\right) \\ \Longrightarrow & f_n & = & \left[\frac{z^n}{n!}\right]\hat{f}(z) \\ & & = & \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \hat{\varphi}^n). \end{array}$$

Esimerkki: Polynomisummat.

Määritettävä summan $\sum_{n\geq 0}(n^2+4n+5)/n!$ arvo. Ratkaistaan laskemalla vastaavan suppenevan potenssisarjan $f(z) = \sum_{n\geq 0}(n^2+4n+5)\frac{z^n}{n!}$ arvo $f(1)$:

$$\begin{array}{rcl} f(z) & = & \{(z\,\mathrm{D})^2 + 4z\,\mathrm{D} + 5\}e^z \\ & = & z\,\mathrm{D}(ze^z) + 4ze^z + 5e^z \\ & = & z^2e^z + ze^z + 4ze^z + 5e^z \\ & = & (z^2+5z+5)e^z \end{array}$$

Tästä saadaan siis tulos $f(1) = 11e$.

Esimerkki: Sekoitukset.

Permutaatio $\pi : [n] \to [n]$ on *sekoitus* (engl. derangement), jos $\pi(i) \neq i$ kaikilla $i \in [n]$. Laskettavana sekoitusten määrä d_n.

Huomataan, että *kaikki* permutaatiot $\pi : [n] \to [n]$ voidaan muodostaa valitsemalla ensin π:n kiintopisteet (olkoon näitä k kappaletta) ja sitten muiden $n-k$ alkion oikea sekoitus. Siten on

$$(\star)\quad n! \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k} \;=\; \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1\cdot d_{n-k}$$

Muodostetaan yhtälön ($\star$) molemmille puoliskoille eksponentiaalinen generoiva funktio. Saadaan:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{n\geq 0} n!\,\frac{z^n}{n!} & = & \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1\cdot d_{n-k}\Big)\frac{z^n}{n!} \\ \Rightarrow \frac{1}{1-z} & = & e^z\cdot\hat{d}(z) \\ \Rightarrow \hat{d}(z) & = & \frac{e^{-z}}{1-z} = \Big(\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}z^k\Big)\Big(\sum_{m\geq 0}z^m\Big) \\ & = & \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\Big)z^n \\ \Rightarrow d_n & = & \left[\frac{z^n}{n!}\right]\hat{d}(z) = n![z^n]\hat{d}(z) \\ & = & n!\Big(\underbrace{1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}}_{\xrightarrow{n\to\infty} e^{-1}}\Big) \approx \frac{n!}{e}. \end{array}$$

Toinen tapa ratkaista sama tehtävä: Selvästikin on $d_1 = 0$ ja $d_2 = 1$. Olkoon nyt $\pi : [n] \to [n]$ sekoitus, $n \geq 3$.

(i) Jos $\pi(n) = i$, $\pi(i) = n$, niin π on myös sekoitus joukossa $[n-1]\setminus\{i\}$.

(ii) Jos taas $\pi(n) = i \neq \pi^{-1}(n) = j$, niin "korvaamalla" n alkiolla j saadaan yksikäsitteinen sekoitus joukossa $[n-1]$.

Siten pätee $d_n = (n-1)(d_{n-2}+d_{n-1}) \iff d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$. Muodostetaan tälle egf:

$$\begin{array}{rrcl} & \hat{d}'(z) & = & z\hat{d}'(z) + z\hat{d}(z) \\ \Longrightarrow & (1-z)\hat{d}'(z) & = & z\hat{d}(z) \\ \Longrightarrow & \int\frac{\hat{d}'}{\hat{d}}dz & = & \int\frac{z}{1-z}\,dz \\ \Longrightarrow & \ln\hat{d}(z) & = & \int\frac{z}{1-z}\,dz \\ & & = & -z - \ln(1-z) + C \\ \Longrightarrow & \hat{d}(z) & = & e^C\frac{e^{-z}}{1-z} \end{array}$$

Tässä $d_2 = \hat{d}''(0) = 1 \Longrightarrow C = 0$.

Luku 4

Kombinatoriset konstruktiot

Kombinatoristen olioiden rakennetta voidaan usein käyttää hyväksi määräämään suoraan niiden lukumääriä laskevat generoivat funktiot. Olkoon $\mathcal{C} = (C, w)$ jokin kombinatoristen olioiden perhe, missä C on perheen perusjoukko ja $w : C \to \mathbb{N}$ olioiden *paino-* t. *kokofunktio*. Merkitään

$$c_n = |w^{-1}(n)| = n\text{:n “painoisten” olioiden } \sigma \in \mathcal{C} \text{ lukumäärä.}$$

Vaaditaan, että $c_n < \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Haluttaisiin saada tietoa luvuista c_n. Yksi lähestymistapa ovat tällöin jonon $\langle c_n \rangle$ tgf ja egf:

$$c(z) \;=\; \sum_{n\geq 0} c_n z^n, \quad \hat{c}(z) \;=\; \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{n!} z^n,$$

jotka voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi (!):

$$c(z) \;=\; \sum_{\sigma\in C} z^{w(\sigma)}, \quad \hat{c}(z) \;=\; \sum_{\sigma\in C} \frac{z^{w(\sigma)}}{w(\sigma)!}.$$

Oletetaan sitten, että perheen $\mathcal{C}$ olioilla on jotain sisäistä rakennetta, eli että perhe $\mathcal{C}$ muodostuu “tekijöistä” $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k$ jonkin “konstruktion” Φ kautta. Täsmällisemmin sanoen: perheen $\mathcal{C} = (C, w)$ *konstruktio* t. *tekijöinti* $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \Phi(\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k)$ on pari $\Phi = (\Phi^e, \Phi^w)$, missä Φ^e on injektio $C \to C_1 \times \ldots \times C_k$ ja $\Phi^w : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ on painomuunnos siten, että jos $\Phi^e(\sigma) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ niin $w(\sigma) = \Phi^w(w(\sigma_1), \ldots, w(\sigma_k))$.

Jos tietyn konstruktion Φ vaikutus tarkasteltavien olioperheiden generoiviin funktioihin voidaan kuvata yksinkertaisella operaattorilla, eli jos on olemassa funktio φ (egf:lle $\hat{\varphi}$) siten, että $c(z) = \varphi(c_1(z), \ldots, c_k(z))$ (egf:lle vastaavasti $\hat{c}(z) = \hat{\varphi}(\hat{c}_1(z), \ldots, \hat{c}_k(z))$) *tekijöitävästä olioperheestä* $\mathcal{C}$ *riippumatta*, sanotaan että konstruktio Φ on tgf-*kelpoinen* (vastaavasti egf-kelpoinen) (engl.

“ogf/egf-admissible”), ja φ on sitä vastaava tgf-*operaattori* (vastaavasti $\hat{\varphi}$ egf-operaattori).

Esimerkki: Summa eli erillinen yhdiste $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Perusjoukko C tulkitaan erilliseksi yhdisteeksi $C \approx A \dot{\cup} B$, $A \cap B = \emptyset$, ja painofunktio määritellään seuraavasti:

$$w_C(\sigma) = \begin{cases} w_A(\sigma), & \text{jos } \sigma \in A, \\ w_B(\sigma), & \text{jos } \sigma \in B. \end{cases}$$

Summakonstruktio on sekä tgf- että egf-kelpoinen, sillä perheistä $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ riippumatta pätee:

$$c(z) = \sum_{\sigma\in C} z^{w_C(\sigma)} = \sum_{\sigma\in A} z^{w_A(\sigma)} + \sum_{\sigma\in B} z^{w_B(\sigma)} = a(z) + b(z)$$

sekä vastaavasti egf:lle $\hat{c}(z) = \hat{a}(z) + \hat{b}(z)$.

Esimerkki: Tulo $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

$C \approx A \times B$ ja $w_C(\alpha, \beta) = w_A(\alpha) + w_B(\beta)$. Tämän tgf- ja egf-kelpoisuus jätetään harjoitustehtäväksi.

Edellisten esimerkkien summa- ja tulokonstruktiot voidaan yleistää myös äärettömiin tekijäperheisiin, mikäli näin muodostuvat generoivat funktiot ovat hyvin määriteltyjä:

- **Summa** $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \ldots \triangleq \sum_{i\geq 0} \mathcal{A}_i$
  - $C \approx \dot{\bigcup}_{i=0}^{\infty} A_i$, $w_C(\sigma) = w_{A_i}(\sigma)$ missä $\sigma \in A_i$
  - $c(z) = \sum_{i\geq 0} a_i(z)$ mikäli hyvin määritelty

$$\iff \text{ kaikilla } n \geq 0 \text{ on } [z^n] \sum_{i\geq 0} a_i(z) = \sum_{i\geq 0} a_{i,n} < \infty$$
$$\iff \text{ kaikilla } n \geq 0 \text{ on } |w_C^{-1}(n)| = \sum_{i\geq 0} |w_{A_i}^{-1}(n)| < \infty.$$

- **Tulo** $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_0 \times \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \ldots \triangleq \prod_{i\geq 0} \mathcal{A}_i$
  - $C \approx \prod_{i=0}^{\infty} A_i$, $w_C(\sigma) = \sum_{i\geq 0} w_{A_i}(\sigma_i)$

– Ääretönpainoisten alkioiden välttämiseksi tuloon C otetaan itse asiassa vain sellaiset jonot $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots)$, joilla $w(\sigma_i) = 0$ melkein kaikilla $i \geq 0$. Kyseessä on siten eräänlainen "heikko tulo" $C \approx \prod_{i\geq 0}^{(w)} A_i$.

– $c(z) = \prod_{i\geq 0} a_i(z)$ mikäli hyvin määritelty

$\Leftrightarrow$ kukin $[z^n]\prod_{i\geq 0} a_i(z) = \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{i_0+i_1+\ldots+i_k=n, i_k\neq 0} a_{0i_0}a_{1i_1}\cdots a_{ki_k}\right) < \infty$

$\Leftrightarrow$ kaikilla $j \geq 1$ on $[z^j]a_i(z) = a_{ij} = 0$ melkein kaikilla $i \geq 0$

$\Leftrightarrow$ kaikilla $j \geq 1$ on $\sum_{i\geq 0} |w_{A_i}^{-1}(j)| < \infty$.

4.1 Tgf-kelpoisia konstruktioita

	Nimi	Konstruktio	Tgf-operaattori	
1.	Summa	$\sum_{i\geq 0} \mathcal{A}_i$	$\sum_{i\geq 0} a_i(z)$	jos hyvin määritelty
2.	Tulo	$\prod_{i\geq 0} \mathcal{A}_i$	$\prod_{i\geq 0} a_i(z)$	jos hyvin määritelty
3.	Diagonaali	$\Delta(\mathcal{A}\times\mathcal{A})$	$a(z^2)$	
4.	Jono	$\mathcal{A}^*$	$(1-a(z))^{-1}$	jos hyvin määritelty
5.	Merkkaus	$\mu\mathcal{A}$	$z\,\mathrm{D}\,a(z)$	
6.	Kompositio	$\mathcal{A}[\mathcal{B}]$	$a(b(z))$	jos hyvin määritelty
7.	Potenssi	$\mathcal{P}(\mathcal{A})$	$\exp\left(\sum_{j\geq 1}\frac{(-1)^{j-1}}{j}a(z^j)\right)$	jos hyvin määritelty
8.	Multipotenssi	$\mathcal{M}(\mathcal{A})$	$\exp\left(\sum_{j\geq 1}\frac{1}{j}a(z^j)\right)$	jos hyvin määritelty

---

Oheisten konstruktioiden määritelmät ja kelpoisuustodistukset:

1. (esimerkkinä edellä)
2. (harjoitustehtävänä)

3. **Diagonaali** $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \Delta(\mathcal{A}\times\mathcal{A})$:

$$\begin{aligned} C &\approx \{(\alpha,\alpha) \mid \alpha\in A\}, \quad w_C(\alpha,\alpha) = 2w_A(\alpha) \\ \Rightarrow\ c(z) &= \sum_{(\alpha,\alpha)\in C} z^{w(\alpha,\alpha)} = \sum_{\alpha\in A} z^{2w(\alpha)} = a(z^2) \end{aligned}$$

4. **Jono** $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^*$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^* &\triangleq \{\epsilon\} + \mathcal{A} + \mathcal{A}\times\mathcal{A} + \ldots = \sum_{k\geq 0}\mathcal{A}^k \\ \Rightarrow\ c(z) &= \sum_{k\geq 0}(a(z))^k = (1-a(z))^{-1}. \end{aligned}$$

Tämä on määritelty jos $a_0 = 0$. Todistus perustuu esitettyihin konstruktioihin 1 ja 2.

5. **Merkkaus** $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mu\mathcal{A}$:

- $C \approx \sum_{n\geq 0}(A_n \times [n])$, missä $A_n = \{\alpha\in A \mid w(\alpha) = n\}$ ja $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$
- Painofunktiolle $w_C(\alpha, i) = w_A(\alpha)$
- Siis $c_n = na_n$ josta saadaan $c(z) = z\,\mathrm{D}\,a(z)$

6. **Kompositio** $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}[\mathcal{B}]$:

- $C \approx \sum_{n\geq 0} A_n \times B^n$
- Painofunktiolle $w_C(\alpha; \beta_1, \ldots, \beta_n) = w_B(\beta_1) + \ldots + w_B(\beta_n)$
- Tämän nojalla $c(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (b(z))^n = a(b(z))$, joka on määritelty jos $b_0 = 0$ tai $a_n = 0$ melkein kaikilla $n \geq 0$. Todistus perustuu konstruktioihin 1 ja 2.

7. **Potenssi** $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}(\mathcal{A})$:

- $C \approx \{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \mid k \geq 0,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A\}$
- Painofunktiolle $w_C(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = w_A(\alpha_1) + \ldots + w_A(\alpha_n)$
- Tästä saadaan $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\alpha\in A}(\underbrace{\{\epsilon\}}_{w=0} + \{\alpha\})$, josta edelleen

$$\begin{aligned} c(z) &= \prod_{\alpha\in A}(1 + z^{w(\alpha)}) \\ &= \prod_{n\geq 0}(1 + z^n)^{a_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \ln c(z) &= \sum_{n\geq 0} a_n \ln(1+z^n), && \text{määr. jos } a_0 = 0\\
&= \sum_{n\geq 0} a_n \sum_{j\geq 1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} z^{nj}\\
&= \sum_{j\geq 1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \sum_{n\geq 0} a_n z^{nj}\\
&= \sum_{j\geq 1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} a(z^j)\\
\Rightarrow \quad c(z) &= \exp\left(\sum_{j\geq 1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} a(z^j)\right) && \text{määr. jos } a_0 = 0
\end{aligned}$$

8. **Multipotenssi** $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathcal{A})$:

- $C \approx \{\{\alpha_1^{j_1}, \ldots, \alpha_k^{j_k}\} \mid k \geq 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A, j_1$ alkion α_1 "kertaluku"$\}$
- Painofunktiolle $w_C\big(\{\alpha_1^{j_1}, \ldots, \alpha_k^{j_k}\}\big) = j_1 w_A(\alpha_1) + \ldots j_k w_A(\alpha_k)$
- Tästä saadaan $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\alpha\in A} \{\alpha\}^*$, josta edelleen

$$\begin{aligned}
c(z) &= \prod_{\alpha\in A}(1-z^{w(\alpha)})^{-1}, && \text{määr. jos } w(\alpha) \neq 0 \quad \forall \alpha \in A\\
&= \prod_{n\geq 0}(1-z^n)^{-a_n}\\
&= \ldots && \text{(harjoitustehtäväksi)}\\
&= \exp\left(\sum_{j\geq 1} \tfrac{1}{j} a(z^j)\right), && \text{määr. jos } a_0 = 0
\end{aligned}$$

- Todistus perustuu konstruktioon 4.

Esimerkki: m**-alkioisen joukon** $[m] = \{1, \ldots, m\}$ **osajoukot.**

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{m}(\overbrace{\{\epsilon\}}^{w=0} + \overbrace{\{i\}}^{w=1})$$

Koska $c_{\{\epsilon\}+\{i\}}(z) = 1 + z$, saadaan $c(z) = (1+z)^m$, ja tästä edelleen $c_n = [z^n](1+z)^m = \binom{m}{n}$.

Esimerkki: m**-alkioisen joukon** $[m] = \{1, \ldots, m\}$ **"multiosajoukot".**

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^{m}\{i\}^*$$

Tässä $c_{\{i\}}(z) = z$ ja $c_{\{i\}^*}(z) = (1-z)^{-1}$, joten $c(z) = (1-z)^{-m}$, ja edelleen $c_n = [z^n](1-z)^{-m} = \binom{-m}{n}(-1)^n = \binom{m+n-1}{n}$.

Esimerkki: Kokonaislukujen ositukset eli partitiot.

Monellako tavalla annettu luku n voidaan esittää summana luvuista $\{1, \ldots, m\}$? Painofunktion luonnollinen määritelmä on $w(k) = k$ ja sivun 19 konstruktiotaulukon pohjalta voidaan kirjoittaa $p_{\{k\}}(z) = z^k$ sekä $p_{\{k\}^*}(z) = (1-z^k)^{-1}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{(m)} &\xrightarrow{\sim} \{1\}^* \times \{2\}^* \times \cdots \times \{m\}^*\\
\therefore \quad p^{(m)}(z) &= \tfrac{1}{1-z} \cdot \tfrac{1}{1-z^2} \cdots \tfrac{1}{1-z^m}
\end{aligned}$$

Monellako tavalla annettu luku n voidaan esittää mielivaltaisena lukusummana positiivisista luvuista?

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &\xrightarrow{\sim} \prod_{k\geq 1}\{k\}^*\\
\therefore \quad p(z) &= \prod_{k\geq 1}(1-z^k)^{-1}
\end{aligned}$$

Esimerkiksi

$$\begin{aligned}
p_4 &= [z^4]\, p(z)\\
&= [z^4]\,(1+z+z^2+\ldots)\cdot(1+z^2+z^4+\ldots)\cdot(1+z^3+z^6+\ldots)\cdot\\
&\quad\ (1+z^4+z^8+\ldots)\cdot(1+z^5+z^{10}+\ldots)\ \cdots\\
&= [z^4]\,(1+z+2z^2+3z^3+5z^4+\ldots) = 5.
\end{aligned}$$

Tulos kuvastaa osituksia $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$.

Esimerkki: Binääripuut.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} &\xrightarrow{\sim} \{\epsilon\} + \{\bullet\} \times \mathcal{T} \times \mathcal{T}\\
\therefore \quad t(z) &= 1 + zt(z)^2\\
&\Rightarrow zt(z)^2 - t(z) + 1 = 0\\
\Leftrightarrow \quad t(z) &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z};\\
t(0) = 1 &\Rightarrow t(z) = \frac{1-(1-4z)^{1/2}}{2z}\\
&\vdots\\
\Rightarrow \quad t_n &= [z^n]t(z) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},
\end{aligned}$$

joka on n:s *Catalanin luku.* (Laskusta on ohitettu runsaasti Newtonin binomikaavaan perustuvia välivaiheita.)

4.2 Egf-kelpoisia konstruktioita

Egf-kelpoisten konstruktioiden määrittelyä varten oletetaan, että tarkasteltavat struktuurit ovat *nimettyjä*: jos $w(\sigma) = n$, niin σ:aan liittyy myös jokin *nimeämiskuvaus* t. *nimentä*, joka on permutaatio $\lambda : [n] \to [n]$. Nimettyjä struktuureja yhdistettäessä täytyy myös niiden nimennät yhdistää jollain konsistentilla tavalla.

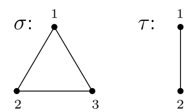
Olkoot $\sigma = (\sigma, \lambda_\sigma)$ ja $\tau = (\tau, \lambda_\tau)$ nimettyjä struktuureita, $w(\sigma) = n$ ja $w(\tau) = m$. Näiden *nimetty tulo* (engl. partitional product) $\sigma * \tau$ koostuu kaikista nimetyistä pareista $((\sigma, \tau); \lambda)$, missä nimentä $\lambda : [n+m] \to [n+m]$ on nimentöjen λ_σ ja λ_τ "limitys". Tämä tarkoittaa, että on olemassa kasvavat injektiot $\theta_\sigma : [n] \to [n+m]$ ja $\theta_\tau : [m] \to [n+m]$ siten, että $\mathrm{Im}\ \theta_\sigma \cap \mathrm{Im}\ \theta_\tau = \emptyset$ ja kaikilla $i \in [n]$, $j \in [m]$ on

$$\lambda(\theta_\sigma(i)) = \theta_\sigma(\lambda_\sigma(i)), \quad \lambda(\theta_\tau(j)) = \theta_\tau(\lambda_\tau(j)).$$

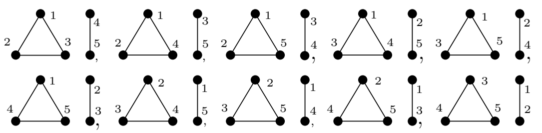
Jos $\gamma \in \sigma * \tau$, niin $w(\gamma) = n + m$.

Esimerkki: Nimetyt verkot.

Olkoot σ ja τ oheiset nimetyt verkot:



Tällöin on:

$\sigma * \tau = \Big\{$  $\Big\}$

Nimettyjen struktuurien perheiden $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ *nimetty tulo* määritellään edelliseen perustuen:

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} = \bigcup_{\substack{\alpha \in A, \\ \beta \in B}} \alpha * \beta.$$

Lemma 4.1. Olkoot nimettyjen luokkien $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ egf:t $\hat{a}(z)$ ja $\hat{b}(z)$ ja $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A} * \mathcal{B}$. Tällöin on luokan $\mathcal{C}$ egf $\hat{c}(z) = \hat{a}(z) \cdot \hat{b}(z)$.

Todistus. Olkoot alkiot $\alpha = (\alpha, \lambda_\alpha) \in A$, $\beta = (\beta, \lambda_\beta) \in B$ ja näiden painot $w(\alpha) = h$, $w(\beta) = k$. Tällöin voidaan α:n nimentä λ_α ja β:n nimentä λ_β limittää kaikkiaan $\binom{h+k}{h}$ tavalla parin (α, β) nimennäksi λ. Siten pari (α, β), jonka paino on $w(\alpha, \beta) = h + k$, on mukana $\binom{h+k}{h}$-kertaisesti tulossa $\mathcal{A} * \mathcal{B}$. Näin ollen on:

$$\begin{aligned}
\hat{c}(z) &= \sum_{\sigma \in C} \frac{z^{w(\sigma)}}{w(\sigma)!} \\
&= \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in B} \binom{w(\alpha) + w(\beta)}{w(\alpha)} \frac{z^{w(\alpha)+w(\beta)}}{(w(\alpha) + w(\beta))!} \\
&= \sum_{\alpha \in A} \sum_{\beta \in B} \frac{z^{w(\alpha)}}{w(\alpha)!} \cdot \frac{z^{w(\beta)}}{w(\beta)!} = \hat{a}(z) \cdot \hat{b}(z).
\end{aligned}$$

□

Seuraavassa on lueteltu joitakin egf-kelpoisia konstruktioita:

		Konstruktio	Egf-operaattori
1.	Summa	$\mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\sum_{i \geq 0} \mathcal{A}_i$	$\hat{a}(z) + \hat{b}(z)$, $\sum_{i \geq 0} \hat{a}_i(z)$
2.	Nimetty tulo	$\mathcal{A} * \mathcal{B}$	$\hat{a}(z)\hat{b}(z)$
3.	Nimetty jono	$\mathcal{A}^{\langle * \rangle}$	$(1 - \hat{a}(z))^{-1}$
4.	Nim. potenssi	$\mathcal{A}^{[*]}$	$e^{\hat{a}(z)}$
5.	Merkkaus	$\mu\mathcal{A}$	$z\,\mathrm{D}\,\hat{a}(z)$
6.	Kompositio	$\mathcal{A}[\mathcal{B}]$	$\hat{a}(\hat{b}(z))$

Konstruktioiden määritelmät ja kelpoisuustodistukset ovat seuraavat:

- **Nimetty jono** $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{\langle * \rangle}$ (engl. partitional complex)
  - Merkintä: $\mathcal{A}^{\langle k \rangle} = \overbrace{\mathcal{A} * \mathcal{A} * \ldots * \mathcal{A}}^{k}$
  - $\mathrm{egf}_{\mathcal{A}^{\langle k \rangle}} = (\hat{a}(z))^k$
  - $\mathcal{A}^{\langle * \rangle} \triangleq \{\epsilon\} + \mathcal{A} + \mathcal{A} * \mathcal{A} + \ldots = \sum_{k \geq 0} \mathcal{A}^{\langle k \rangle}$
  - Kelpoisuus selvä Lemman 4.1 nojalla: $\mathrm{egf} = (1 - \hat{a}(z))^{-1}$
- **Nimetty (multi-)potenssi** $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{[*]}$ (engl. abelian partitional complex)
  - Merkintä: $\mathcal{A}^{[k]} = \{\overbrace{\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}}^{\text{multijoukko}} \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in A^{\langle k \rangle}\}$
  - $\mathrm{egf}_{\mathcal{A}^{[k]}} = \frac{1}{k!} \cdot \mathrm{egf}_{\mathcal{A}^{\langle k \rangle}} = \frac{1}{k!}(\hat{a}(z))^k$

– $\mathcal{A}^{[*]} \triangleq \{\epsilon\} + \mathcal{A} + \mathcal{A}^{[2]} + \mathcal{A}^{[3]} + \ldots = \sum_{k \geq 0} \mathcal{A}^{[k]}$

– $\mathrm{egf}_{\mathcal{A}^{[*]}} = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (\hat{a}(z))^k = e^{\hat{a}(z)}$.

- **Merkkaus** ja **kompositio** kuten tgf-tapauksessa.

Esimerkki: Joukko-ositukset.

Merkitään nimettyjen äärellisten epätyhjien joukkojen perhettä $\mathcal{S} = \{[n] : n \geq 1\}$, jossa $[n] = \{1, \ldots, n\}$, ja määritellään tälle painofunktio $w([n]) = w(\{1, \ldots, n\}) = n$. $\mathcal{S}$:lle saadaan egf:ksi siis

$$\hat{s}(z) = \sum_{n \geq 0} s_n \cdot \frac{z^n}{n!} = \sum_{n \geq 1} 1 \cdot \frac{z^n}{n!} = e^z - 1.$$

Tällöin $\mathcal{S}^{[k]}$ vastaa järjestämättömiä osituksia k epätyhjään luokkaan. Voidaan kirjoittaa tälle $\mathrm{egf}_{\mathcal{S}^{[k]}}$:

$$\frac{1}{k!}(e^z - 1)^k = \sum_{n \geq 0} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{z^n}{n!}.$$

Tämä on ns. *toisen lajin Stirlingin lukujen* egf.

Edelleen $\mathcal{B} = \mathcal{S}^{[*]}$ = ositukset mielivaltaisen moneen epätyhjään luokkaan, ja $\mathrm{egf}_{\mathcal{B}} = \exp(e^z - 1) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{z^n}{n!}$, joka puolestaan on ns. *Bellin lukujen* egf.

Esimerkki: Permutaatiot ja syklit.

Merkitään permutaatioiden luokkaa $\mathcal{P}$:llä ja syklisten permutaatioiden luokkaa $\mathcal{C}$:llä. Tunnetaan $p_n = n!$ ja tästä saadaan

$$\hat{p}(z) = \sum_{n \geq 0} p_n \frac{z^n}{n!} = (1 - z)^{-1}.$$

Toisaalta tiedetään, että $\mathcal{P} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{[*]}$, josta seuraa $\hat{p}(z) = e^{\hat{c}(z)}$. Nyt voidaan laskea $\hat{c}(z)$:

$$\hat{c}(z) = \ln(1 - z)^{-1} = -\ln(1 - z) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n$$

$$\Rightarrow c_n = \left[\frac{z^n}{n!}\right] \hat{c}(z) = n![z^n]\hat{c}(z) = n! \cdot \frac{1}{n} = (n-1)!,$$

mikä on odotettu tulos.

Mielenkiintoinen luokka on $\mathcal{C}^{[k]}$ eli niiden permutaatioiden luokka, joissa on tasan k sykliä. Tälle on $\mathrm{egf}_{\mathcal{C}^{[k]}} = \frac{1}{k!}(\hat{c}(z))^k = \frac{1}{k!}\left(\ln \frac{1}{1-z}\right)^k$. Merkitään

$$\left[\frac{z^n}{n!}\right] \mathrm{egf}_{\mathcal{C}^{[k]}} \triangleq \left[{n \atop k} \right],$$

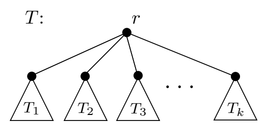
joka on ns. *ensimmäisen lajin Stirlingin luku.*

Merkitään edelleen $\mathcal{D}$:llä vähintään kahden mittaisia syklisiä permutaatiota. Tällöin $\mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \{(1)\} + \mathcal{D}$, mistä edelleen $\hat{c}(z) = z + \hat{d}(z)$ ja siis $\hat{d}(z) = -\ln(1 - z) - z$. Tällöin on *sekoitusten* luokka $\mathcal{D}^{[*]}$ ja sillä $\mathrm{egf}_{\mathcal{D}^{[*]}} = e^{\hat{d}(z)} = \frac{e^{-z}}{1-z}$. (Vrt. esimerkkiin sivulla 15.)

Involuutio on permutaatio, joka on oma käänteiskuvauksensa, eli koostuu vain yhden ja kahden alkion pituisista sykleistä. Merkitään involuutioiden luokkaa $\mathcal{I}$:llä. Tällöin $\mathcal{I} \xrightarrow{\sim} \{(1), (1\ 2)\}^{[*]}$, mistä seuraa

$$\mathrm{egf}_{\mathcal{I}} = \exp\left(\frac{z^1}{1!} + \frac{z^2}{2!}\right) = \exp\left(z + \frac{1}{2}z^2\right).$$

Esimerkki: Juurretut puut.



(i) Nimetyt, epätyhjät järjestetyt juurretut puut: $\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \{r\} * \mathcal{T}^{\langle * \rangle}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \hat{t}(z) = z \cdot \tfrac{1}{1 - \hat{t}(z)} && \Rightarrow \hat{t}^2 - \hat{t} + z = 0 \\
&\Rightarrow \hat{t}(z) = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4z}) && \\
&\Rightarrow t_n = \left[\tfrac{z^n}{n!}\right] \hat{t}(z) && = n! \cdot \tfrac{1}{n}\tbinom{2n-2}{n-1}
\end{aligned}$$

(Vrt. esimerkkiin sivulla 22.)

(ii) Nimetyt epätyhjät järjestämättömät juurretut puut: $\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \{r\} * \mathcal{T}^{[*]}$.

Tästä saadaan konstruktiotaulukon (s. 24) perusteella $\hat{t}(z) = ze^{\hat{t}(z)}$. Miten ratkaistaan $\hat{t}(z)$?

Lause 4.2. (Lagrangen-Bürmannin inversiokaava, J.-L. Lagrange, 1770) Olkoot $f(z)$ ja $\varphi(u)$ (formaaleja) potenssisarjoja, joille on voimassa $\varphi(0) \neq 0$ ja $f(z) = z\varphi(f(z))$. Tällöin on f:n ja φ:n kertoimien välillä riippuvuus

$$[z^n]f(z) = \frac{1}{n}[u^{n-1}]\varphi(u)^n.$$

□

Lauseen 4.2 todistus, hieman yleisemmässä muodossa, esitetään luvussa 5.2.

Esimerkki: Lauseen sovellus.

Edellisen esimerkin ongelmalliselle egf:lle $\hat{t}(z) = ze^{\hat{t}(z)}$ saadaan Lauseen 4.2 inversiokaavasta

$$t_n = \left[\frac{z^n}{n!}\right]\hat{t}(z) = n![z^n]\hat{t}(z) = n!\cdot\frac{1}{n}[u^{n-1}](e^u)^n = (n-1)![u^{n-1}]e^{nu},$$

ja kun $e^{nu} = \sum_{k\geq 0}\frac{(nu)^k}{k!}$, niin saadaan $t_n = (n-1)!\,\frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = n^{n-1}$.

Tämän tuloksen seurauksena saadaan tunnettu lause (A. Cayley 1889), jonka mukaan nimettyjä n-solmuisia (juurtamattomia) puita on n^{n-2} kpl.

Luku 5

Generoivan funktion purkaminen

5.1 Rekursiokaavat (“$z\,\mathrm{D}\log$”-temppu)

Olkoon $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ generoiva funktio, jonka suljettu muoto tunnetaan. Kertoimien f_n laskemiseksi voidaan joskus (ehkä jopa usein?) muodostaa rekursiokaava seuraavalla tempulla:

(i) Määritellään funktio $\partial(z) = z\,\mathrm{D}\ln f(z) = \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$

(ii) Ratkaistaan funktion $\partial(z)$ kertoimet (jos osataan): $\partial(z) = \sum_{k\geq 1}\delta_k z^k$

(iii) Samaistetaan kertoimet yhtälössä $zf'(z) = \partial(z)f(z)$:

$$\sum_{n\geq 1} nf_n z^n = \Big(\sum_{k\geq 1}\delta_k z^k\Big)\Big(\sum_{j\geq 0} f_j z^j\Big),$$

josta saadaan tulokseksi

$$nf_n = \sum_{k=1}^{n}\delta_k f_{n-k},\ n\geq 1.$$

Esimerkki: Bellin luvut.

$\hat{b}(z) = e^{e^z-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} z^n$

$$\begin{aligned}
\partial(z) &= z \,\mathrm{D} \ln \hat{b}(z) = z\,\mathrm{D}(e^z - 1) = z e^z \\
&= \sum_{k\geq 0} \frac{z^{k+1}}{k!} = \sum_{k\geq 1} \frac{z^k}{(k-1)!} \\
\Rightarrow \quad n \cdot \tfrac{b_n}{n!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \\
\Rightarrow \quad b_n &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{n-k} \cdot b_{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \cdot b_k, \quad n \geq 1.
\end{aligned}$$

5.2 Lagrangen(-Bürmannin) inversiokaava

Ensin taustaa, jota tarvitaan myöhemminkin: Palautetaan mieliin (Lause 2.1, s. 8), että formaalien potenssisarjojen renkaassa $\mathbb{C}[\![z]\!]$ alkio $f = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ on kääntyvä (eli on olemassa potenssisarja $f^{-1} \in \mathbb{C}[\![z]\!]$), jos ja vain jos $f_0 \neq 0$. Siten esimerkiksi sarja $f(z) = z$ ei ole kääntyvä.

Laajennetaan $\mathbb{C}[\![z]\!]$ jakokunnakseen:

$$\mathbb{C}(\!(z)\!) = \left\{ \text{“}\frac{f}{g}\text{”} \; : \; f, g \in \mathbb{C}[\![z]\!],\ g \neq 0 \right\}$$

(Lainausmerkit viittaavat siihen, että oikeastaan kyse on parien $(f, g) \in \mathbb{C}[\![z]\!]^2$ ekvivalenssiluokista: $(f, g) \sim (f', g')$ jos ja vain jos $fg' = f'g$.)

Kunnan $\mathbb{C}(\!(z)\!)$ alkiot voidaan tulkita formaaleina *Laurent-sarjoina*

$$h(z) = \sum_{n=m}^{\infty} h_n z^n, \; m \in \mathbb{Z}.$$

Kunnassa $\mathbb{C}(\!(z)\!)$ on siis jokainen alkio $h \neq 0$ kääntyvä.

Jos esimerkiksi $f = \sum_{n\geq m} f_n z^n$ on potenssisarja, jonka ensimmäinen nollasta poikkeava kerroin on f_m, niin formaalisti on $f(z) = z^m \tilde{f}(z)$, missä $\tilde{f}(z) = \sum_{n\geq 0} f_{n+m} z^n$ on kääntyvä $\mathbb{C}[\![z]\!]$:ssä. Olkoon $\mathbb{C}[\![z]\!]$:ssä $\tilde{f}(z)$:n käänteissarja $\tilde{g}(z) = \sum_{n\geq 0} \tilde{g}_n z^n$; tällöin pätee

$$f^{-1}(z) = z^{-m} \tilde{g}(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} \tilde{g}_{n+m} z^n.$$

Formaaleille Laurent-sarjoille voidaan todistaa samat laskusäännöt (mukaanlukien derivointi ja integrointi) kuin formaaleille potenssisarjoillekin. Erityisesti:

$$\mathrm{D} \frac{f}{g} = \mathrm{D}\, f g^{-1} = -f g^{-2} g' + f' g^{-1} = \frac{f'g - fg'}{g^2},$$

kun $g \neq 0$.

Formaalin Laurent-sarjan $h(z) = \sum_{n=m}^{\infty} h_n z^n$ *residy* on kerroin $\mathrm{Res}(h(z)) = h_{-1}$. (Tämä on $= 0$, jos $m \geq 0$).

Lemma 5.1. Olkoon $h(z) = \sum_{n=m}^{\infty} h_n z^n$, $h_m \neq 0$, formaali Laurent-sarja. Tällöin:

(i) $\mathrm{Res}(h'(z)) = 0$

(ii) $\mathrm{Res}(h'(z)/h(z)) = m$

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Lause 5.2. (Potenssisarjojen inversio) Olkoon $f(z) = \sum_{n\geq 1} f_n z^n$ potenssisarja, jolle $f_0 = 0$ ja $f_1 \neq 0$. Tällöin sillä on käänteissarja $g(u) = \sum_{n\geq 1} g_n u^n$ siten, että $g(f(z)) = z$. (Vrt. Lauseeseen 2.3 sivulla 11.) Sarjan g kertoimet saadaan kaavasta:

$$g_n = \mathrm{Res}\left(\frac{1}{n f^n(z)} \right).$$

Todistus. Derivoimalla yhtälö $z = g(f(z))$ puolittain saadaan:

$$(\star) \quad 1 \;=\; \mathrm{D}\left(\sum_{k\geq 1} g_k \cdot (f(z))^k \right) \;=\; \sum_{k\geq 1} k \cdot g_k \cdot (f(z))^{k-1} f'(z).$$

Jakamalla edelleen $(\star)$ puolittain $n f^n(z)$:lla saadaan:

$$\frac{1}{n f^n(z)} = \sum_{k\geq 1} \frac{k}{n} \cdot g_k \cdot (f(z))^{k-1-n} f'(z).$$

Siten voidaan kirjoittaa:

$$\mathrm{Res}\left(\frac{1}{n f^n(z)} \right) \;=\; \sum_{k\geq 1} \frac{k}{n} \cdot g_k \cdot \mathrm{Res}\left((f(z))^{k-1-n} \cdot f'(z) \right).$$

Lauseketta sieventämällä saadaan:

$$(f(z))^{k-1-n} \cdot f'(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{k-n} \mathrm{D} \left(f(z)^{k-n} \right), & k \neq n \\ \dfrac{f'(z)}{f(z)}, & k = n. \end{cases}$$

Tästä saadaan residylle Lemman 5.1 nojalla arvoksi vain nolla tai yksi:

$$\mathrm{Res} \left((f(z))^{k-1-n} \cdot f'(z) \right) = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ 1, & k = n, \end{cases}$$

joten $\mathrm{Res} \left(\dfrac{1}{n f^n(z)} \right) = \dfrac{n}{n} \cdot g_n \cdot 1 = g_n$. □

Luku 6

Analyysin perustuloksia

6.1 Riemann-Stieltjes -integraali

Olkoot $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, P jokin välin $[a, b]$ ositus $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ja $t_0, \ldots, t_{n-1}$ pisteitä siten, että $t_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Määritellään *Riemann-Stieltjes -summa*

$$S(P) = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k)(g(x_{k+1}) - g(x_k)).$$

Jos on olemassa arvo $A \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists P_\epsilon \ (P \text{ hienompi kuin } P_\epsilon \ \Rightarrow \ |S(P) - A| < \epsilon),$$

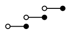
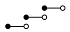
niin tämä arvo on f:n *Riemann-Stieltjes -integraali* (lyhennetään RS-integraali) g:n *suhteen* välillä $[a, b]$,

$$A = \int_a^b f(t) \, dg(t).$$

Huom: Jos $g(t) = t$, niin määritelmä palautuu tavalliseksi Riemann-integraaliksi.

6.1.1 RS-integraalin ominaisuuksia

Käytettyjä merkintöjä:

$\lceil t \rceil$	$=$	pienin kokonaisluku $\geq t$	(“kattofunktio”)	
$\lfloor t \rfloor$	$=$	suurin kokonaisluku $\leq t$	(“lattiafunktio”)	
$\{t\}$	$=$	$t - \lfloor t \rfloor$, t:n desimaaliosa	(“sahalaitafunktio”)	

(1) **Yksikäsitteisyys**: Jos $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ on olemassa, niin sen arvo on yksikäsitteisesti määrätty. Riittävä olemassaoloehto on esimerkiksi se, että f on jatkuva ja g on “rajoitetusti heilahteleva”, eli

$$\sum_{0 \leq k < n} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| < \infty$$

kun $\| P \| \to 0$ (intuitiivisesti “$\int_a^b |\,dg(t)| < \infty$”).

(2) **Lineaarisuus**:

(i) $$\int (c_1 f_1 + c_2 f_2)\,dg = c_1 \int f_1\,dg + c_2 \int f_2\,dg,$$

(ii) $$\int f\,d(c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 \int f\,dg_1 + c_2 \int f\,dg_2.$$

(3) **Välien yhdistäminen**: jos $\exists \int_a^b f\,dg$ ja $\exists \int_b^c f\,dg$ niin

$$\int_a^b f\,dg + \int_b^c f\,dg = \int_a^c f\,dg.$$

(4) **Osittaisintegrointi**: jos $\exists \int_a^b f\,dg$, niin myös $\exists \int_a^b g\,df$ ja

$$\int_a^b f(t)\,dg(t) + \int_a^b g(t)\,df(t) = \Big/_a^b f(t)g(t).$$

(5) **Muuttujanvaihto**: Olkoon $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva, ei-vähenevä funktio. Tällöin:

$$\int_a^b f(h(t))dg(h(t)) = \int_{h(a)}^{h(b)} f(t)\,dg(t).$$

(6) **Palautus Riemann-integraaliin**: jos $\exists \int_a^b f\,dg$ ja $g'(t)$ on jatkuva välillä $[a,b]$, niin

$$\int_a^b f(t)\,dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

(7) **Summien esittäminen**: Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$, f oikealta jatkuva $\mathbb{Z}$-pisteissä. Tällöin:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,d\lceil t \rceil &= \sum_{k=a}^{b-1} f(k),\\
\int_a^b f(t)\,dg(\lceil t \rceil) &= \sum_{a \leq k < b} f(k) \bigtriangleup g(k), \quad \bigtriangleup g(k) = g(k+1) - g(k).
\end{aligned}$$

Vastaavasti f:n ollessa vasemmalta jatkuva $\mathbb{Z}$-pisteissä pätee:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,d\lfloor t \rfloor &= \sum_{k=a+1}^{b} f(k),\\
\int_a^b f(t)\,dg(\lfloor t \rfloor) &= \sum_{a < k \leq b} f(k) \bigtriangledown g(k), \quad \bigtriangledown g(k) = g(k) - g(k-1).
\end{aligned}$$

Oikealta jatkuvilla f pätee myös kaava:

$$\int_a^b f(\lceil t \rceil)\,dg(t) = \sum_{a < k \leq b} f(k) \bigtriangledown g(k)$$

ja vasemmalta jatkuvilla kaava:

$$\int_a^b f(\lfloor t \rfloor)\,dg(t) = \sum_{a \leq k < b} f(k) \bigtriangleup g(k),$$

(8) **Integraalin derivointi**:

$$\int_a^b f(t)\,d\int_a^t g(u)\,dh(u) = \int_a^b f(t)g(t)\,dh(t).$$

6.1.2 Eulerin summakaava

Jatkuvilla f on tunnetusti “suunnilleen” $\sum_{a \leq k < b} f(k) \approx \int_a^b f(t)\,dt$. Miten tarkka tämä arvio on?

RS-integraalin ominaisuuden (7) sekä lineaarisuuden (2) mukaan on $\mathbb{Z}$-pisteissä vasemmalta jatkuvilla f *täsmälleen*:

$$\sum_{a < k \leq b} f(k) = \int_a^b f(t)\,d\lfloor t \rfloor = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f(t)d\{t\}.$$

Sovelletaan tähän edelleen osittaisintegrointia (4):

$$\int_a^b f(t)\,d\{t\} + \int_a^b \{t\}\,df(t) = \Big/_a^b f(t)\{t\}.$$

Tämän lausekkeen arvo on nolla, jos $a, b \in \mathbb{Z}$. Jos nyt $a, b \in \mathbb{Z}$ ja f' on jatkuva välillä $[a, b]$, saadaan kaava:

$$\sum_{a<k\le b} f(k) = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b f'(t)\{t\}dt,$$

joka voidaan myös kirjoittaa muotoon:

$$(\star)\quad \sum_{a\le k\le b} f(k) = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b f'(t)\left(\{t\} - \frac{1}{2}\right)dt + \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

tai

$$\sum_{a\le k<b} f(k) = \int_a^b f(t)dt - \frac{1}{2}\Big/_a^b f(t) + \underbrace{\int_a^b f'(t)\left(\{t\} - \frac{1}{2}\right)dt}_{R_1}.$$

Jos f:llä on myös korkeamman kertaluvun derivaatat, voidaan jäännöstermiä R_1 kehittää edelleen, jolloin saadaan *Eulerin(-Maclaurinin) summakaava*:

$$(\star\star)\quad \sum_{a\le k<b} f(k) = \int_a^b f(t)\,dt + \sum_{m=1}^{n} \frac{B_m}{m!}\Big/_a^b f^{(m-1)}(t) + \underbrace{(-1)^{n+1}\int_a^b \frac{B_n(\{t\})}{n!} f^{(n)}(t)\,dt}_{R_n}$$

missä kertoimet B_m ovat *Bernoullin lukuja*, ja $B_n(x)$ on n:s *Bernoullin polynomi*

$$B_n(x) = \binom{n}{0}B_0x^n + \binom{n}{1}B_1x^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}B_nx^0.$$

Huom: Jäännöstermi R_n ei välttämättä mene nollaan n:n kasvaessa; suuruusluokka valitulla n on aina tarkastettava erikseen.

Esimerkki: Kertoman arviointi ("Heikko Stirlingin kaava").

Soveltamalla yksinkertaista summakaavaa $(\star)$ funktion $n!$ logaritmiin saadaan

seuraava arvio:

$$\begin{aligned}\ln n! &= \textstyle\sum_{1\le k\le n} \ln k\\ &= \int_1^n \ln t\,dt + \int_1^n \frac{1}{t}\left(\{t\} - \frac{1}{2}\right)dt + \frac{\ln 1 + \ln n}{2}\\ &= n\ln n - n + 1 + \tfrac{1}{2}\ln n + \int_1^n \frac{1}{t}\left(\{t\} - \frac{1}{2}\right)dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow n\ln n - n + 1 &\le \ln n! &\le n\ln n - n + \ln n + 1\\ &\Longrightarrow e\left(\tfrac{n}{e}\right)^n &\le n! &\le en\left(\tfrac{n}{e}\right)^n.\end{aligned}$$

Tarkemman arvion muodostamiseksi sovelletaan ensin Eulerin summakaavaa $(\star\star)$ funktioon $\ln(n-1)!$ ja korjataan sitten tulosta lisäämällä termi $\ln n$:

$$\begin{aligned}\ln(n-1)! &= \textstyle\sum_{1\le k<n} \ln k\\ &= \int_1^n \ln t\,dt + \sum_{m=1}^{2}\frac{B_m}{m!}\Big/_1^n D^{(m-1)}\ln t - \int_1^n \frac{B_2(\{t\})}{2}D^{(2)}\ln t\,dt\\ &= \Big/_1^n (t\ln t - t) - \frac{1}{2}\Big/_1^n \ln t + \frac{1}{12}\Big/_1^n \frac{1}{t} + \int_1^n \frac{\{t\}^2 - \{t\} + \frac{1}{6}}{2t^2}dt\\ &= n\ln n - n + 1 - \tfrac{1}{2}\ln n + \mathcal{O}(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \ln n! &= n\ln n - n + \tfrac{1}{2}\ln n + \mathcal{O}(1)\\ \Longrightarrow n! &= \Theta\left(\sqrt{n}\cdot\left(\tfrac{n}{e}\right)^n\right).\end{aligned}$$

6.1.3 Kompleksinen RS-integraali

Myös kompleksiarvoisille $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ voidaan RS-integraali $\int_a^b f\,dg$ määritellä RS-summien avulla aivan kuten edellä. Jos on $f = f_1 + if_2$, $g = g_1 + ig_2$, niin RS-summia tarkastelemalla on helppo osoittaa:

$$(\star)\quad \int_a^b f\,dg = \left(\int_a^b f_1\,dg_1 - \int_a^b f_2\,dg_2\right) + i\left(\int_a^b f_1\,dg_2 + \int_a^b f_2\,dg_1\right).$$

Esitystä $(\star)$ käyttäen voidaan kaikki RS-integraalien ominaisuudet (1) – (8) yleistää reaalisesta kompleksiseen tapaukseen.

6.2 Kompleksianalyysin perusteita

Olkoon $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ kompleksitason *alue* eli avoin yhtenäinen joukko, ja $f(z)$ alueessa $\mathcal{D}$ määritelty kompleksifunktio. f on *derivoituva* pisteessä $z_0 \in \mathcal{D}$ jos raja-arvo

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

on olemassa. Huom: Raja-arvon tulee siis olla riippumaton siitä, mistä "suunnasta" z lähestyy z_0:aa.

f on *analyyttinen* eli *holomorfinen alueessa* $\mathcal{D}$, jos se on derivoituva kaikilla $z_0 \in \mathcal{D}$. Yleisesti f on analyyttinen *joukossa* A, jos se on analyyttinen jossain alueessa $\mathcal{D} \supseteq A$. Erityisesti f on analyyttinen *pisteessä* z_0, jos se on analyyttinen jossain z_0:n ympäristössä $B(z_0; r)$.

Merkitään $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Voidaan osoittaa, että f on analyyttinen pisteessä $z = x + iy$, jos ja vain jos funktioilla $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ on pisteessä (x, y) jatkuvat osittaisderivaatat, jotka toteuttavat ns. *Cauchyn-Riemannin ehdot*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Edelleen voidaan osoittaa, että jos f on analyyttinen pisteessä $z \in \mathbb{C}$, sillä on itse asiassa kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat pisteessä $z \in \mathbb{C}$.

Funktio f on *kokonainen*, jos se on analyyttinen kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Esimerkiksi funktiot e^z ja z^n ovat kokonaisia. Ns. *Liouvillen lauseen* mukaan voi kokonainen funktio olla rajoitettu ($|f(z)| < M$, $\forall z \in \mathbb{C}$) vain, jos se on vakio.

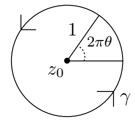
Kompleksitason *polku* (tai *tie*) on jatkuva kuvaus $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ jossa $a, b \in \mathbb{R}$. Polun γ määrittämä *käyrä* on sen kuvajoukko $\Gamma = \gamma([a, b])$. Polku on *suljettu*, jos $\gamma(a) = \gamma(b)$, ja *yksinkertainen*, jos se ei leikkaa itseään paitsi mahdollisesti päätepisteissä, so. jos kuvauksen γ rajoittuma puoliavoimelle välille $[a, b)$ on injektio. Yksinkertainen suljettu polku on *kierros* (kirjallisuudessa tavallisemmin "Jordan-käyrä"). Jokainen kierros jakaa *Jordanin käyrälauseen* mukaan kompleksitason kahteen erilliseen avoimeen joukkoon, kierroksen *sisä-* ja *ulkopuoleen*, joiden yhteinen reuna se on. Kierroksella on yksikäsitteinen positiivinen tai negatiivinen *(kierto)suunta*, joka on sama kaikkien sen sisäpisteiden suhteen. Jatkossa tarkastellaan vain *paloittain tasaisia* polkuja, so. sellaisia polkufunktioita γ joilla on paloittain jatkuva ja rajoitettu derivaatta γ'.

Olkoon $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ alue, f alueessa $\mathcal{D}$ määritelty kompleksifunktio ja $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ polku siten, että $\gamma([a, b]) \subseteq \mathcal{D}$. Funktion f *integraali polun* γ *suhteen* määritellään

$$\int_\gamma f \triangleq \int_a^b f(\gamma(t))\, d\gamma(t) = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt.$$

(Tässä ja jatkossa siis oletetaan ilman eri mainintaa, että tarkasteltavat polut γ ovat paloittain tasaisia.) Myös merkintää $\int_\gamma f(z)\, dz$ käytetään.

Esimerkki: 1.



Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ ja $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ siten, että $\gamma(\theta) = z_0 + e^{2\pi i\theta}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} &= \int_0^1 \frac{1}{\gamma(\theta) - z_0} \cdot \gamma'(\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^1 \frac{1}{e^{2\pi i\theta}} \cdot 2\pi i\, e^{2\pi i\theta}\, d\theta \\ &= \int_0^1 2\pi i\, d\theta = 2\pi i. \end{aligned}$$

Esimerkki: 2.

Olkoon edellä $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n}$, $n > 1$. Tällöin vastaava menettely antaa seuraavan tuloksen:

$$\begin{aligned} \int_\gamma (z - z_0)^{-n} dz &= \int_0^1 \left(e^{2\pi i\theta}\right)^{-n} \cdot 2\pi i\, e^{2\pi i\theta} d\theta \\ &= 2\pi i \int_0^1 e^{-(n-1)2\pi i\theta} d\theta \\ &= \frac{2\pi i}{-(n-1)2\pi i} \Big/_0^1 e^{-(n-1)2\pi i\theta} \\ &= -\frac{1}{n-1}\left(\big(\underbrace{e^{2\pi i}}_{=1}\big)^{-(n-1)} - 1\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Huomataan myös, että esimerkkien 1 ja 2 tulokset ovat valitun z_0-keskisen ympyrän säteestä r (esimerkeissä $r = 1$) riippumattomia.

Olkoot $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ ja $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbb{C}$ polkuja siten, että $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Määritellään polku $\gamma_1 + \gamma_2 : [a,c] \to \mathbb{C}$ seuraavasti:

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b,c] \end{cases}$$

RS-integraalin perusominaisuuksista seuraa, että $\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int\limits_{\gamma_1} f + \int\limits_{\gamma_2} f$ milloin integraalit ovat olemassa.

Samoin, jos määritellään polusta $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ polku $-\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ eli $(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t)$, niin on voimassa $\int\limits_{-\gamma} f = -\int\limits_{\gamma} f$.

Integraalia suljetun polun γ suhteen merkitään usein $\oint\limits_{\gamma} f$.

Lemma 6.1. Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ polku, jonka pituus on $L(\gamma) = \int\limits_a^b |d\gamma|$ ja f kompleksifunktio siten, että $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \gamma([a,b])$. Tällöin on

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq M \cdot L(\gamma).$$

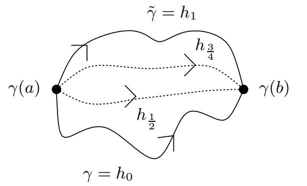
Todistus. Seuraa suoraan RS-integraalin ominaisuuksista. □

Polut $\gamma, \tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{C}$ ovat *homotooppiset joukossa* $\mathcal{D}$, jos

(i) $\gamma(a) = \tilde{\gamma}(a)$, $\gamma(b) = \tilde{\gamma}(b)$ tai $\gamma(a) = \gamma(b)$, $\tilde{\gamma}(a) = \tilde{\gamma}(b)$ (suljetuille poluille)

(ii) $\gamma([a,b]) \subseteq \mathcal{D}$, $\tilde{\gamma}([a,b]) \subseteq \mathcal{D}$ ja $\exists$ jatkuva kuvaus $h : [0,1] \times [a,b] \to \mathcal{D}$ siten, että

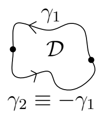
- $h(0,t) = \gamma(t)\ \forall t \in [a,b]$
- $h(1,t) = \tilde{\gamma}(t)\ \forall t \in [a,b]$
- $h(s,a) = \gamma(a)$, $h(s,b) = \gamma(b)\ \forall s \in [0,1]$ tai $h(s,a) = h(s,b)\ \forall s \in [0,1]$ (suljetuille poluille)



Lause 6.2. Olkoon f analyyttinen alueessa $\mathcal{D}$, paitsi mahdollisesti äärellisessä määrää pisteitä, joissa se on vain jatkuva. Olkoot γ ja $\tilde{\gamma}$ polkuja, jotka ovat homotooppisia $\mathcal{D}$:ssä. Tällöin on $\int\limits_\gamma f = \int\limits_{\tilde{\gamma}} f$. □

Seuraus 6.3. (Cauchy) Olkoot f ja $\mathcal{D}$ kuten edellä ja γ polku, joka on $\mathcal{D}$:ssä homotooppinen pisteen kanssa. Tällöin on $\oint\limits_\gamma f = 0$.

Todistus. (Pikemminkin perustelu.) Olkoon $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Tällöin γ_2 on homotooppinen polun $-\gamma_1$ kanssa, joten $\oint_\gamma f = \int\limits_{\gamma_1} f + \int\limits_{\gamma_2} f = \int\limits_{\gamma_1} f - \int\limits_{\gamma_1} f = 0$.



□

Sanotaan, että suljettu polku γ on *kutistuva* alueessa $\mathcal{D}$, jos se on $\mathcal{D}$:ssä homotooppinen pisteen kanssa. (Kirjallisuudessa käytetään myös termiä “nollahomotooppinen” polku.) Alue $\mathcal{D}$, jonka sisällä jokainen suljettu polku on kutistuva, on *yhdesti yhtenäinen*. (Tällainen alue $\mathcal{D}$ ei sisällä “reikiä”)

Esimerkki: Integrointi kutistuvalla polulla.

Olkoot $f(z) = z$ ja polku $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, jolle $\gamma(\theta) = e^{2\pi i\theta}$. Tällöin:

$$\begin{aligned} \oint_\gamma z\,dz &= \int_0^1 e^{2\pi i\theta} \cdot \left(2\pi i\, e^{2\pi i\theta}\right) d\theta \\ &= 2\pi i \int_0^1 e^{4\pi i\theta} d\theta \\ &= \frac{2\pi i}{4\pi i} \Big/_0^1 e^{4\pi i\theta} \\ &= \tfrac{1}{2}\left(e^{4\pi i} - 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Lause 6.4. ("Cauchyn integraalikaava") Olkoon f analyyttinen yhdesti yhtenäisessä alueessa $\mathcal{D}$ ja γ jokin $\mathcal{D}$:n positiivinen kierros. Olkoon edelleen z_0 jokin γ:n rajaaman yhdesti yhtenäisen alueen sisäpiste. Tällöin on

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz.$$

Todistus. Huomautetaan ensin, että kierros γ on homotooppinen $\mathcal{D}$:ssä jonkin z_0:n positiiviseen suuntaan kiertävän ympyräpolun kanssa. Lisäksi, koska $\mathcal{D}$ on yhdesti yhtenäinen, γ on kutistuva.

Määritellään sitten

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & z \neq z_0 \\ f'(z_0), & z = z_0. \end{cases}$$

Tällöin myös g on analyyttinen alueessa $\mathcal{D}$ paitsi mahdollisesti pisteessä z_0, missä se on jatkuva. Siten on Seurauksen 6.3 mukaan

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_\gamma g(z) = \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \oint_\gamma \frac{f(z_0)}{z - z_0}\, dz \\ &= \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - f(z_0) \underbrace{\oint_\gamma \frac{dz}{z - z_0}}_{2\pi i} \\ \Rightarrow\ f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz. \end{aligned}$$

Edellä on integraalin $\oint_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$ laskemiseen käytetty Esimerkin 1 (s. 38) ja Lauseen 6.2 tuloksia. □

Huom: Mielivaltaisen, ei-yksinkertaisen suljetun polun γ tapauksessa täytyy ottaa huomioon myös ns. kiertoluku $n(\gamma, z_0) \in \mathbb{Z}$, joka ilmaisee mihin suuntaan ja montako kertaa polku γ kiertää pisteen z_0. Yleisessä muodossa Cauchyn kaava on siis

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = n(\gamma, z_0) f(z_0).$$

Lause 6.5. Olkoot f, $\mathcal{D}$, γ ja z_0 kuten Lauseessa 6.4. Tällöin on kaikilla $n \geq 0$:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz,$$

ja funktiolla f pisteessä z_0 *Taylor-kehitelmä*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Todistus. Seuraa suhteellisen helposti Lauseesta 6.4. □

Olkoon funktio f määritelty jossain pisteen $z_0 \in \mathbb{C}$ "punkteeratussa" avoimessa ympäristössä $\mathcal{D} \setminus \{z_0\}$ ja $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. Jos jollakin *kokonaisluvulla* $m \geq 1$ on funktio $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ analyyttinen pisteessä z_0, niin z_0 on funktion f *napa* ja pienin m, jolla em. ehto on voimassa, on navan z_0 *kertaluku*.

Em. ehdoilla on Lauseen 6.5 mukaan g:llä z_0:n ympäristössä voimassa oleva potenssisarjakehitelmä

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} b_n (z - z_0)^n,$$

mistä saadaan f:lle vastaava *Laurent-kehitelmä*

$$f(z) = (z - z_0)^{-m} \cdot g(z) = \sum_{n \geq -m} a_n (z - z_0)^n,$$

jossa $a_n \triangleq b_{n+m}$. Jos navan z_0 kertaluku on m, niin välttämättä $a_{-m} = b_0 \neq 0$ (koska muuten kertaluku olisi alempi). Napa, jonka kertaluku on 1, on *yksinkertainen*.

Funktion f z_0-keskeisen Laurent-kehitelmän kerroin a_{-1} on f:n *residy* pisteessä z_0. Merkitään:

$$a_{-1} = \operatorname{Res}(f; z_0) \quad \text{tai} \quad a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z).$$

Joskus käytetään myös merkintää $\operatorname{Res}(f; 0) \triangleq [z^{-1}] f(z)$.

Yksinkertaisessa navassa residy voidaan laskea seuraavasti:

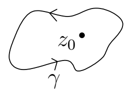
$$\operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z),$$

ja periaatteessa yleisestikin m-kertaisessa navassa

$$\operatorname*{Res}_{z = z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \mathrm{D}^{(m-1)} \left((z - z_0)^m f(z) \right).$$

Jälkimmäisessä tapauksessa laskut ovat kuitenkin usein käytännössä työläitä.

Olkoon sitten em. tilanteessa γ alueen $\mathcal{D}$ positiivinen kierros, jonka sisään ei jää muita f:n napoja kuin z_0. Tällöin:



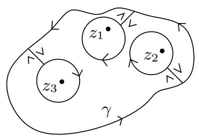
$$\begin{aligned}\oint_\gamma f(z)\,dz &= \sum_{n\geq -m} a_n \oint_\gamma (z-z_0)^n\,dz \\ &= a_{-1}\cdot 2\pi i \\ &= 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z).\end{aligned}$$

Funktio f on alueessa $\mathcal{D}$ *meromorfinen*, jos se on $\mathcal{D}$:ssä analyyttinen paitsi mahdollisesti diskreetissä joukossa napoja.

Lause 6.6. ("Cauchyn residylause") Olkoon γ positiivinen kierros, jonka sisällä meromorfisella funktiolla f on navat $z_1, \ldots, z_k$, ja polulla γ funktio f on analyyttinen. Tällöin on

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z).$$

Todistus. (Lähinnä todistusidea.) Muokataan polusta γ polku $\tilde{\gamma}$ "leikkaamalla" navat $z_1, \ldots, z_k$ sen sisältä pois oheisen kuvan osoittamalla tavalla riittävän pienillä negatiivisesti suunnistetuilla kierroksilla $\gamma_1 \ldots, \gamma_k$.



Näin muodostettu $\tilde{\gamma}$ on kutistuva positiivinen kierros, ja f sen sisällä analyyt-

tinen. Siten on:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\tilde{\gamma}} f = \oint_\gamma f + \oint_{\gamma_1} f + \ldots + \oint_{\gamma_k} f \\ \Rightarrow \oint_\gamma f &= \oint_{-\gamma_1} f + \ldots + \oint_{-\gamma_k} f \\ &= 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z).\end{aligned}$$

□

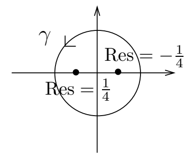
Esimerkki: 1.

Olkoon γ positiivisesti suunnistettu yksikköympyrä. Määritä $\displaystyle\oint_\gamma \frac{dz}{1-4z^2}$.

Meromorfifunktiolla $f(z) = \dfrac{1}{1-4z^2}$ on yksinkertaiset navat $z = \pm\frac{1}{2}$. Osamurtokehitelmästä

$$\frac{1}{1-4z^2} = \frac{1/2}{1-2z} + \frac{1/2}{1+2z} = \frac{-1/4}{z-1/2} + \frac{1/4}{z+1/2}$$

nähdään, että $\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2}} f(z) = -\frac{1}{4}$ ja $\operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}} f(z) = \frac{1}{4}$.



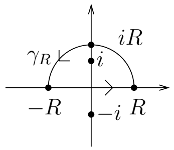
Siten on:

$$\oint_\gamma \frac{dz}{1-4z^2} = 2\pi i\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) = 0.$$

Esimerkki: 2.

Määritä $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Tarkastellaan funktion $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2} = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$ integrointia kompleksitasossa oheisen kuvan osoittamaa polkua γ_R, $r \geq 1$, pitkin.



Funktiolla f on yksinkertaiset navat $\pm i$, joista napa $z = i$ jää integrointipolun sisään. Siten on

$$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{z-i}{1+z^2} = \frac{2\pi i}{2i} = \pi.$$

Toisaalta on

$$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^2} + \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{dR\,e^{i\varphi}}{1+(R\,e^{i\varphi})^2}}_{\leq \pi R\cdot \frac{1}{|R^2-1|}} \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Siten saadaan tulokseksi $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$

Luku 7

Asymptoottiset menetelmät

7.1 Meromorfisten generoivien funktioiden kertoimet

Peruslähtökohta: jos generoiva funktio $(\star)$ $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ suppenee jossakin origon ympäristössä, niin sen kertoimet määräytyvät Lauseen 6.5 mukaisesti Cauchyn kaavasta:

$$(\star\star) \quad f_n \quad = \quad \tfrac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz,$$

missä γ on mikä tahansa sarjan $(\star)$ suppenemisalueeseen sisältyvä positiivinen origon kierros. Kerroinintegraaleja $(\star\star)$ pyritään arvioimaan eri keinoin, esimerkiksi residylaskennalla.

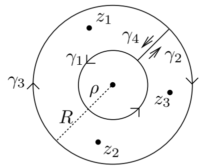
Lause 7.1. Olkoon generoiva funktio $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ meromorfinen alueessa $|z| \leq R$ ja analyyttinen kehällä $|z| = R$. Olkoot f:n navat alueessa $|z| < R$ $z_1, \ldots, z_k$. Tällöin on olemassa polynomit $P_1, \ldots, P_k$, joilla

$$f_n = \sum_{j=1}^{k} z_j^{-n} P_j(n) + \mathcal{O}\left(R^{-n}\right).$$

Polynomin P_j aste on navan z_j kertaluku m_j vähennettynä yhdellä eli $\deg P_j = m_j - 1$. Erityisesti siis yksinkertaisille navoille em. polynomit ovat vakioita:

$$P_j = -\frac{1}{z_j} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z).$$

Todistus. Olkoon r sarjan $(\star)$ suppenemissäde ja $\rho < r$. Oheisen kuvan esittämä integrointipolku $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ kiertää kaikki f:n navat $z_1, \ldots, z_k$ myötäpäivään.



Residylauseen 6.6 nojalla on siten

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz &= -2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \frac{f(z)}{z^{n+1}} \\
&= \oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz + \oint_{\gamma_3} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz + \int_{\gamma_4} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz \\
&= 2\pi i \cdot f_n + \oint_{\gamma_3} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz,
\end{aligned}$$

sillä kuten kuvasta havaitaan, polut γ_2 ja γ_4 kumoavat toisensa ($\gamma_2 = -\gamma_4$).

Tämän perusteella voidaan kirjoittaa edelleen

$$\begin{aligned}
f_n &= -\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \frac{f(z)}{z^{n+1}} + \overbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz}^{(\star)} \\
&= -\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} \frac{f(z)}{z^{n+1}} + \mathcal{O}\left(R^{-n}\right),
\end{aligned}$$

sillä

$$|(\star)| \le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \frac{\max_{|z|=R} |f(z)|}{R^{n+1}} = \frac{\max_{|z|=R} |f(z)|}{R^n}.$$

On huomattava, että tässä termi $\mathcal{O}\left(R^{-n}\right)$ on vain asymptoottinen n:n suhteen; sen vakiokerroin vaihtelee valitun R:n mukaan.

Harjoitustehtäväksi jätetään osoittaa, että termi $\operatorname*{Res}_{z=z_j} \frac{f(z)}{z^{n+1}}$ on muotoa $z_j^{-n} \cdot P_j(n)$, missä $\deg P_j = m_j - 1$. $\square$

Esimerkki: Surjektiot.

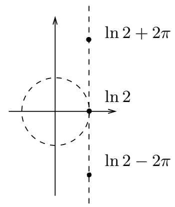
Merkitään s_n:llä surjektioiden $h : [n] \to [k]$, $k \le n$, lukumäärää. Merkitään edelleen $\mathcal{S}$:llä surjektioiden painotettua perhettä, jonka egf on $\hat{s}(z) = \sum_{n\ge 0} \frac{s_n}{n!} z^n$.

Olkoon $\mathcal{A} = \{1\} + \{1,2\} + \{1,2,3\} + \ldots$ nimettyjen, äärellisten epätyhjien joukkojen perhe, jonka egf on $\hat{a}(z) = \sum_{n\ge 1} 1 \cdot \frac{z^n}{n!} = e^z - 1$.

Surjektioiden perhe $\mathcal{S}$ voidaan tekijöidä $\mathcal{A}$:n avulla, $\mathcal{S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}^{\langle * \rangle}$, mistä saadaan

$$\hat{s}(z) = \frac{1}{1 - \hat{a}(z)} = \frac{1}{2 - e^z}.$$

Nähdään, että tämän egf:n $\hat{s}(z)$ ainoat erikoispisteet ovat yksinkertaiset navat $z_k = \ln 2 + k \cdot 2\pi i$, jossa $k \in \mathbb{Z}$.



Funktion residy näissä on

$$\operatorname*{Res}_{z=z_k} \hat{s}(z) = \lim_{z\to z_k} \frac{z - z_k}{2 - e^z} = \lim_{z\to z_k} \frac{1}{-e^z} = \frac{1}{-e^{z_k}} = -\frac{1}{2}.$$

(Raja-arvon laskemiseen on tässä sovellettu L'Hospitalin sääntöä.)

Lauseen 7.1 mukaan voidaan egf:n $\hat{s}(z)$ kertoimia arvioida tarkentuvasti ottaen laajempia (= useampia napapareja sisältäviä) integroimissäteitä. Esimerkiksi kun säde valitaan väliltä $\ln 2 < R_0 < \sqrt{\ln^2 2 + 4\pi^2}$, saadaan arvioksi

$$\hat{s}_n = \frac{s_n}{n!} = z_0^{-n} \cdot \Big(-\frac{1}{z_0} \overbrace{\operatorname*{Res}_{z=z_0} \hat{s}(z)}^{-\frac{1}{2}} \Big) + \mathcal{O}\left(R_0^{-n}\right) = \frac{1}{2} (\ln 2)^{-(n+1)} + \mathcal{O}\left(R_0^{-n}\right);$$

kun säde valitaan väliltä $\sqrt{\ln^2 2 + 4\pi^2} < R_1 < \sqrt{\ln^2 2 + 16\pi^2}$, saadaan arvio

$$\hat{s}_n = \frac{1}{2} (\ln 2)^{-(n+1)} + \frac{1}{2} \left((\ln 2 + 2\pi i)^{-(n+1)} + (\ln 2 - 2\pi i)^{-(n+1)} \right) + \mathcal{O}\left(R_1^{-n}\right);$$

ja yleisesti väliltä $\sqrt{\ln^2 2 + k^2\pi^2} < R_k < \sqrt{\ln^2 2 + (k+1)^2\pi^2}$ saadaan

$$\hat{s}_n = \frac{1}{2} (\ln 2)^{-(n+1)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \left((\ln 2 + j \cdot 2\pi i)^{-(n+1)} + (\ln 2 - j \cdot 2\pi i)^{-(n+1)} \right) + \mathcal{O}\left(R_k^{-n}\right).$$

Ensimmäisen arvion mukaan siis $s_n = n!\, \hat{s}_n \approx \frac{1}{2\ln 2} \cdot \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^n \cdot n! \approx 0.72 \cdot (1.44)^n \cdot n!$.

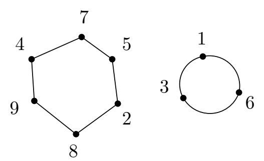
7.2 Algebralliset erikoispisteet

Funktion $f(z)$ erikoispiste (= ei-analyyttisyyspiste) z_0 on *algebrallinen*, jos jollakin $\alpha \in \mathbb{R}$ voidaan kirjoittaa $f(z) = \tilde{f}(z) + g(z)/(z_0 - z)^\alpha$, missä funktiot $\tilde{f}(z)$ ja $g(z)$ ovat analyyttisia z_0:ssa. Pienin tällainen α on erikoispisteen z_0 *kertaluku* eli *paino*.

Esimerkki: 2-säännölliset verkot.

Merkitään $\mathcal{F}$:llä 2-säännöllisten nimettyjen verkkojen perhettä ja vastaavasti f_n:llä n-solmuisten 2-säännöllisten verkkojen lukumäärää kun $n \geq 3$. Vastaava egf on siis $\hat{f}(z) = \sum_{n\geq 0} f_n \frac{z^n}{n!}$.

2-säännöllinen verkko vastaa järjestämätöntä kokoelmaa syklejä:



Merkitään $\mathcal{C}$:llä syklien perhettä, eli yhtenäisten 2-säännöllisten verkkojen perhettä ja tämän egf:ää $\hat{c}(z) = \sum_{n\geq 0} c_n \frac{z^n}{n!}$.

Suunnattu sykli vastaa syklistä permutaatiota kun $n \geq 3$, ja syklisten permutaatioiden egf $= \ln \frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$ (ks. sivun 25 esimerkki).

Tämän perusteella saadaan

$$\begin{aligned} \hat{c}(z) &= \frac{1}{2}\left(\ln \frac{1}{1-z} - z - \frac{z^2}{2}\right) \\ \Rightarrow \quad \hat{f}(z) &= e^{\hat{c}(z)} = \frac{e^{-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{4}}}{\sqrt{1-z}} \end{aligned}$$

Nähdään, että funktiolla $\hat{f}(z)$ on "$\frac{1}{2}$-kertainen" algebrallinen erikoispiste $z = 1$.

Funktiolla $f(z)$ on erikoispiste $z_0 \neq 0$ jos ja vain jos funktiolla $\tilde{f}(z) = f(z_0 z)$ on erikoispiste 1, joten oletetaan seuraavassa että $z_0 = 1$. Oletetaan toistaiseksi

myös, että piste $z = 1$ on f:n *ainoa* erikoispiste kiekossa $B(0; 1 + \eta)$ jollakin $\eta > 0$.

Tällöin funktio $g(z) = (1 - z)^\alpha f(z)$ on analyyttinen kiekossa $B(0; 1 + \eta)$; erityisesti sillä on pisteessä $z = 1$ kehitelmä $g(z) = \sum_{k\geq 0} g_k (1 - z)^k$, voimassa kun $z \in B(1; \eta)$.

Nyt on ainakin punkteeratussa kiekossa $B(1; \eta) \setminus \{1\}$ voimassa

$$f(z) = (1 - z)^{-\alpha} g(z) = \sum_{k\geq 0} g_k (1 - z)^{k-\alpha},$$

joten ehkä f:n Taylor-sarjan kertoimia voitaisiin arvioida:

$$\begin{aligned} f_n &= [z^n] f(z) \approx [z^n] \sum_{k\geq 0} g_k (1 - z)^{k-\alpha} \\ &= [z^n] \sum_{k\geq 0} g_k \sum_{j\geq 0} \binom{k-\alpha}{j} (-z)^j \\ &= (-1)^n \sum_{k\geq 0} g_k \binom{k-\alpha}{n} \\ &= \sum_{k\geq 0} g_k \binom{n-k+\alpha-1}{n} \qquad ? \end{aligned}$$

Lause 7.2. (Darboux) Olkoon $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ funktio siten, että jollakin $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, \ldots\}$ on funktio $g(z) = (1 - z)^\alpha f(z)$ analyyttinen kiekossa $B(0; 1 + \eta)$, $\eta > 0$. Olkoon g:llä pisteen $z = 1$ ympäristössä kehitelmä $g(z) = \sum_{k\geq 0} g_k (1 - z)^k$. Tällöin on kaikilla $m \geq 0$:

$$\begin{aligned} f_n &= [z^n] \left\{ \sum_{k=0}^{m} g_k (1 - z)^{k-\alpha} \right\} + \mathcal{O}\left(n^{-m-2+\alpha}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{m} g_k \binom{n-k-1+\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(n^{-m-2+\alpha}\right) \end{aligned}$$

Todistus. Tarkastellaan "virhefunktiota"

$$h(z) = f(z) - \sum_{k=0}^{m} g_k (1 - z)^{k-\alpha} = \sum_{k\geq m+1} g_k (1 - z)^{k-\alpha}, \ |z| < 1.$$

Tällöin on $h(z) = (1 - z)^{m+1-\alpha} \cdot \tilde{h}(z)$, missä funktio $\tilde{h}(z)$ on analyyttinen kiekossa $B(0; 1 + \eta)$. Voidaan osoittaa (ks. Wilf, "generatingfunctionology", s.

179), että tässä tapauksessa on $[z^n]h(z) = \mathcal{O}\left(n^{-(m+1-\alpha)-1}\right) = \mathcal{O}\left(n^{-m-2+\alpha}\right)$ ja siten $f_n = [z^n]\left\{\sum_{k=0}^{m} g_k(1-z)^{k-\alpha}\right\} + [z^n]\,h(z)$ väitteen mukainen. □

Esimerkki: 2-säännollisistä verkoista (jatkoa).

Sovelletaan Lausetta 7.2 funktioon $\hat{f}(z) = \dfrac{e^{-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{4}}}{(1-z)^{\frac{1}{2}}}$ valinnalla $m = 2$.

Kehitetään funktio $\hat{g}(z) = (1-z)^{\frac{1}{2}} \cdot \hat{f}(z) = e^{-\frac{z}{2}-\frac{z^2}{4}}$ pisteessä $z = 1$:

$$\begin{aligned}\hat{g}(z) &= \sum_{n\geq 0} \frac{\hat{g}^{(n)}(1)}{n!}(-1)^n(1-z)^n \\ &= e^{-\frac{3}{4}} + e^{-\frac{3}{4}}(1-z) + \frac{e^{-\frac{3}{4}}}{4}(1-z)^2 + \ldots\end{aligned}$$

Lauseen 7.2 nojalla saadaan ($m = 2$):

$$\hat{f}_n = \frac{f_n}{n!} = e^{-\frac{3}{4}}\binom{n-\frac{1}{2}}{n} + e^{-\frac{3}{4}}\binom{n-\frac{3}{2}}{n} + \frac{e^{-\frac{3}{4}}}{4}\binom{n-\frac{5}{2}}{n} + \mathcal{O}\left(n^{-7/2}\right),$$

mikä voidaan Stirlingin kaavan yms. avulla kirjoittaa myös muotoon

$$f_n \approx \frac{n! \cdot e^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{n\pi}}\left\{1 - \frac{5}{8n} + \frac{1}{128n^2} + \ldots\right\}.$$

Lause 7.2 voidaan vahvistaa muotoon (ks. Bender, SIAM Review 1974):

Lause 7.3. (Darboux-Szegö) Olkoon funktio $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ analyyttinen kiekossa $B(0;r)$, $r > 0$, ja sen kehällä $|z| = r$ funktiolla vain algebralliset erikoispisteet $z_1, \ldots, z_k$ joiden kertaluvut ovat $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2, \ldots\}$. Olkoot $g_1, \ldots, g_k$ luvun alussa kuvattuun tapaan erikoispisteet $z_1, \ldots, z_k$ "korjaamalla" saatavat, näissä pisteissä analyyttiset funktiot

$$g_j(z) = \left(1 - \frac{z}{z_j}\right)^{\alpha_j}(f(z) - \tilde{f}(z)).$$

Olkoon edelleen $a = \max\{\mathcal{R}e(\alpha_j) \mid j = 1, \ldots, k\}$. Tällöin on

$$f_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} \frac{g_j(z_j)n^{\alpha_j}}{\Gamma(\alpha_j)z_j^n} + o\left(r^{-n}n^{a-1}\right).$$

7.3 Kokonaiset generoivat funktiot

Jos funktio $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ on kokonainen, voidaan (täytyy?) kertoimien f_n arviointi perustaa suoraan Cauchyn integraalikaavaan (Lause 6.5 sivulla 42):

$$f_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz,$$

missä γ on jokin origon positiivinen kierros.

Olkoon esimerkiksi γ = positiivisesti suunnistettu ρ-säteinen ympyrä. Jos on $f_n \geq 0$ $\forall n$ (kuten usein kombinatorisissa sovelluksissa), niin

$$|z| = \rho \Rightarrow |f(z)| \leq \sum_{n\geq 0}|f_n z^n| = \sum_{n\geq 0} f_n|\,z|^n = f(\rho)$$

eli $\max\limits_{|z|=\rho}|f(z)| = f(\rho)$.

Tässä tapauksessa saadaan siis arvio:

$$\begin{aligned}(\star)\quad f_n &\leq \tfrac{1}{2\pi} \cdot \left(\max_{|z|=\rho}\left|\frac{f(z)}{z^{n+1}}\right|\right) \cdot 2\pi\rho \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{f(\rho)}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho = \frac{f(\rho)}{\rho^n}.\end{aligned}$$

Koska arvio $(\star)$ on voimassa kaikilla $\rho > 0$, voidaan yrittää valita paras tällainen, eli tiukimman ylärajan antava. Koska edelleen $\lim\limits_{\rho\to 0,\infty} \dfrac{f(\rho)}{\rho^n} = \infty$, niin optimaalinen ρ on jokin derivaatan $\mathrm{D}\,f(\rho)/\rho^n$ nollakohdista:

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\,f(\rho)\cdot\rho^{-n} &= f'(\rho)\cdot\rho^{-n} - nf(\rho)\rho^{-n-1} \\ &= \rho^{-n-1}\cdot(\rho f'(\rho) - nf(\rho)) = 0 \\ \Leftrightarrow\ \tfrac{\rho f'(\rho)}{f(\rho)} &= n\,(\star\star).\end{aligned}$$

Huom: Ei haittaa, vaikka annetulla n yhtälöä $(\star\star)$ ei pystyisikään ratkaisemaan tarkasti. Arvio $(\star)$ on voimassa kaikilla $\rho > 0$; kyse on vain arvion optimoinnista.

Esimerkki: Kertoman arviointi.

Olkoon $f(z) = e^z = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}z^n$. Tällöin on

$$\frac{\rho f'(\rho)}{f(\rho)} = \frac{\rho e^\rho}{e^\rho} = \rho,$$

joten valitsemalla annetulla n integrointikehä $\rho = n$ saadaan seuraava arvio:

$$f_n = \frac{1}{n!} \leq \frac{f(\rho)}{\rho^n} = \frac{e^n}{n^n} \Leftrightarrow n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Em. menetelmän puute on, että integrointipolku on valittu niin jäykästi (ympyrä) ja funktion arvoa polulla yliarvioidaan reilusti. Huolellisemmin valinnoin voidaan todistaa seuraava vahva tulos (ks. Wilf, "generatingfunctionology", s. 183):

Lause 7.4. (W. Hayman 1956) Olkoon $f(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$ "Hayman-kelpoinen" (ks. alla) funktio. Määritellään apufunktiot $a(\rho) = \rho f'(\rho)/f(\rho)$ ja $b(\rho) = \rho a'(\rho)$. Olkoon kullekin $n \geq 1$ yhtälön $a(\rho) = n$ positiivinen reaalijuuri ρ_n. Tällöin on

$$f_n \sim \frac{f(\rho_n)}{\rho_n^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi b(\rho_n)}}.$$

Funktion Hayman-kelpoisuuden yleiset ehdot ovat mutkikkaat (ks. Wilf, ss. 183–184), mutta esimerkiksi seuraavat riittävät ehdot on helppo testata:

(i) funktiot muotoa $e^{P(z)}$, jossa $P(z) \neq 0$ on polynomi ja joilla lisäksi pätee $[z_n]e^{P(z)} > 0$ melkein kaikilla n, ovat Hayman-kelpoisia;

(ii) jos f ja g ovat Hayman-kelpoisia, niin myös fg ja e^f ovat sitä;

(iii) jos f on Hayman-kelpoinen ja P on polynomi, jonka korkeimman asteen kerroin on positiivinen, niin $f + P$, $f \cdot P$ ja $P(f)$ ovat Hayman-kelpoisia.

Esimerkki: Stirlingin kaava.

Funktioon $f(z) = e^z$ sovellettuna Lause 7.4 antaa arvion

$$f_n = \frac{1}{n!} \sim \frac{e^n}{n^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

so.

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

7.3.1 Satulapiste-estimointi

Haymanin lauseen (7.4) todistus perustuu arvioitavan integraalin *satulapiste-estimaattiin*. Menetelmän idea voidaan yksinkertaisessa tapauksessa esittää seuraavasti:

Olkoon arvioitavana integraali

$$I = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma e^{h(z)}dz,$$

missä γ on mielivaltainen origon kiertävä, positiivisesti suunnattu ympyräpolku ja $h(z)$ "tarvittavassa alueessa" analyyttinen funktio, jolla on ominaisuus

$$\max_{|z|=R} |h(z)| = h(R), \ \forall R > 0.$$

(Voimassa esimerkiksi jos $h(z) = \sum_{n\geq 0} h_n z^n$, jossa $h_n \geq 0 \ \forall n \geq 0$.)

Esimerkiksi Cauchyn kaavan mukaisessa generoivan funktion $f(z)$ kertoimen $[z^n]$ määrittävässä integraalissa on

$$(\star) \quad h(z) \ \equiv h_n(z) \ = \ \ln f(z) - (n+1)\ln z.$$

Määritetään ensin integroimissäteelle $R > 0$ arvo, joka toteuttaa ehdot:

$$(\star\star) \quad h'(R) \ = \ 0, \quad h''(R) \ > \ 0.$$

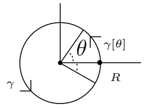
Esimerkiksi kaavan $(\star)$ tapauksessa ehto $(\star\star)$ saa muodon (vrt. sivun 52 tulokseen)

$$\frac{f'(R)}{f(R)} - (n+1)\cdot\frac{1}{R} = 0 \Longleftrightarrow \frac{R\,f'(R)}{f(R)} = n+1.$$

Oletetaan sitten (heuristisesti), että R-säteisellä ympyrällä $\gamma = \gamma_R$ on funktion $e^{h(z)}$ massa niin keskittynyt pisteen $z = R$ ympäristöön, että jollakin pienellä kulmalla θ ovat voimassa molemmat approksimaatiot:

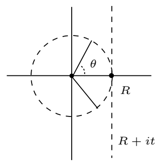
(i) $\oint_\gamma e^{h(z)}dz \approx \int_{\gamma[\theta]} e^{h(z)}dz$ ja

(ii) $e^{h(z)} \approx \underbrace{e^{h(R)+\frac{1}{2}h''(R)(z-R)^2}}_{\text{huom } h'(R)=0}$, $z \in \gamma[\theta]$.



Siirrytäänkin nyt integroimaan pisteen R ympäristössä polun $\gamma[\theta]$ sijaan pitkin suoraa $z = R + it$, ja oletetaan edelleen, että voimassa on approksimaatio

$$\text{(iii)} \quad \int\limits_{\gamma[\theta]} e^{h(z)}dz \approx \int\limits_{R-i\theta R}^{R+i\theta R} e^{h(z)}dz \approx \int\limits_{R-i\infty}^{R+i\infty} e^{h(z)}dz.$$



Jos oletukset (i) – (iii) ovat voimassa, saadaan integraalille I arvio

$$\begin{aligned}
I &= \tfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma} e^{h(z)}dz \\
&\approx \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma[\theta]} e^{h(R)+\frac{1}{2}h''(R)(z-R)^2}dz \\
&\approx \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{h(R)}\cdot e^{\frac{1}{2}h''(R)(it)^2}dt \\
&= \frac{e^{h(R)}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}h''(R)}dt \\
&= \frac{e^{h(R)}}{2\pi}\cdot\sqrt{\frac{2\pi}{h''(R)}} \\
&= \frac{e^{h(R)}}{\sqrt{2\pi h''(R)}}.
\end{aligned}$$

Sovellettuna generoivan funktion $f(z)$ kertoimen $[z^n]$ määrittämiseen tästä saadaan arvio:

$$(\star\star\star) \quad [z^n]f(z) \approx \frac{e^{h(R_n)}}{\sqrt{2\pi h''(R_n)}} = \frac{f(R_n)}{R_n^{n+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi h''(R_n)}},$$

missä siis

$$\begin{aligned}
h(R) &= \ln f(R) - (n+1)\ln R \\
h'(R_n) &= 0 \Longleftrightarrow \frac{R_n f'(R_n)}{f(R_n)} = n+1.
\end{aligned}$$

Arvio $(\star\star\star)$ vastaa selvästi Haymanin kaavaa, olettaen että approksimointiehdot (i) – (iii) täyttävät. Tässä tapauksessa nimittäin:

$$\begin{aligned}
a(R) &= \tfrac{Rf'(R)}{f(R)} \\
&= Rh'(R) + (n+1) \\
&= n+1, \qquad \text{kun } R = R_n, \\
b(R) &= Ra'(R) \\
&= R(Rh''(R) + h'(R)) \\
&= R^2h''(R) + Rh'(R) \\
&= R^2h''(R) + (a(R) - (n+1)) \\
&= R^2h''(R), \qquad \text{kun } R = R_n.
\end{aligned}$$

7.4 Integraalimuunnokset

Integraalimuunnoksessa $\mathcal{I}[f]$ annettu funktio $f(t)$ "projisoidaan" sopivasti valituille kantafunktioille $b_s(t)$. Projektioita $\mathcal{I}[f](s) = \langle f, b_s\rangle$ tarkastelemalla voidaan saada paljon tietoa funktion f ominaisuuksista. Käänteismuunnos $\mathcal{I}^{-1}[\hat{f}]$ rekonstruoi funktion f projektioistaan.

- **Laplace-muunnos**: kantafunktiot muotoa $b_s(t) = e^{-st}$,
$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-st}dt$$
- **Fourier-muunnos**: kantafunktiot muotoa $b_\omega(t) = e^{-i\omega t}$,
$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt$$
- **Mellin-muunnos**: kantafunktiot muotoa $b_p(t) = t^{p-1}$,
$$\mathcal{M}[f](p) = \int_0^{\infty} f(t)\cdot t^{p-1}dt$$

Kaikki integraalimuunnokset ovat lineaarisia:

$$\mathcal{I}[\alpha f + \beta g] = \alpha\mathcal{I}[f] + \beta\mathcal{I}[g].$$

Itse asiassa kaikki kolme em. integraalimuunnosta ovat läheistä sukua toisilleen. Jos esimerkiksi määritellään vielä 2-puoleinen Laplace-muunnos:

$$\mathcal{L}^{\pm}[f](s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st} dt,$$

niin on $\mathcal{F}[f](\omega) = \mathcal{L}^{\pm}[f](i\omega)$. Samoin voidaan Mellin-muunnos $\mathcal{M}[f]$ esittää funktion $g(t) = f(e^{-t})$ 2-puoleisen Laplace-muunnoksen avulla:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\pm}[g](p) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-pt}dt &&= \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{-t})e^{-pt}dt \\
&= \int_{\infty}^{0} f(x)x^p\left(-\tfrac{dx}{x}\right) &&= \int_{0}^{\infty} f(x)x^{p-1}dx = \mathcal{M}[f](p),
\end{aligned}$$

jossa tehty muuttujan vaihto $x = e^{-t}$ ja siten $dx = -e^{-t}\,dt = -x\,dt$.

7.4.1 Kantafunktiokehitelmät

Erityisesti integraalimuunnokset helpottavat annetun funktion "kantafunktiokehitelmän" määrittämistä. Esimerkiksi jos $f(t) = e^{\lambda t}$, jossa $\lambda \in \mathbb{C}$, niin

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{\lambda t}](s) &= \int_{0}^{\infty} e^{\lambda t}e^{-st}dt &&= \int_{0}^{\infty} e^{(\lambda-s)t}dt \\
&= \tfrac{1}{\lambda-s}\Big/_{0}^{\infty} e^{(\lambda-s)t} &&= \tfrac{1}{\lambda-s}(0-1) = \tfrac{1}{s-\lambda},
\end{aligned}$$

kun $\mathcal{R}e(\lambda) < \mathcal{R}e(s)$. $\mathcal{L}$-muunnoksen lineaarisuuden nojalla on siten yleisestikin voimassa, että jos $f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{\lambda_i t}$, niin

$$\mathcal{L}[f](s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{s-\lambda_i},$$

eli funktion f eksponentiaalisia "kertalukuja" vastaavat funktion $\mathcal{L}[f]$ navat, vieläpä niin että funktion $\mathcal{L}[f]$ residy tietyssä navassa on vastaavan f:n eksponentiaalisen kertaluvun painokerroin.

Vastaavasti on Mellin-muunnoksella "melkein" voimassa $\mathcal{M}[t^{\lambda}](p) = \frac{1}{p+\lambda}$. Ongelmana on, että integraali

$$\hat{f}(p) = \int_{0}^{\infty} f(t)t^{p-1}dt$$

suppenee, jos ja vain jos pätee sekä $f(t) \cdot t^{p-1} = o\left(t^{-1}\right)$ kun $t \to 0$, että $f(t) \cdot t^{p-1} = o\left(t^{-1}\right)$ kun $t \to \infty$, eli

$$\begin{cases} f(t) = o\left(t^{-p}\right), & t \to 0 \\ f(t) = o\left(t^{-p}\right), & t \to \infty. \end{cases}$$

Tarkasteltavan funktion f täytyy siis toteuttaa ehdot

$$\begin{cases} f(t) = o\left(t^{-\alpha}\right), & t \to 0 \\ f(t) = o\left(t^{-\beta}\right), & t \to \infty \end{cases}$$

joillakin $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ siten, että $\alpha < \beta$. Muunnos $\mathcal{M}[f](p)$ on tällöin määritelty "nauhassa" $\alpha < \mathcal{R}e(p) < \beta$.

Esimerkki: (Edellisen tuloksen sovellus).

Olkoon $f(t) = \delta(t) \cdot t^{\lambda}$, jossa $\delta(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$

Tällöin on:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}[f](p) &= \int_{0}^{\infty} \delta(t) \cdot t^{\lambda} \cdot t^{p-1}dt \\
&= \int_{0}^{1} t^{\lambda+p-1}dt \\
&= \tfrac{1}{p+\lambda}, \text{ kun } -\lambda < \mathcal{R}e(p) < \infty.
\end{aligned}$$

$\mathcal{M}$-muunnoksen lineaarisuuden nojalla on voimassa, että jos asymptoottisesti kun $t \to 0$ pätee

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{\lambda_i},\ \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$$

ja asymptoottisesti kun $t \to \infty$ pätee $f(t) = \mathcal{O}\left(t^{\beta}\right)$, $\beta < \lambda_1$, niin[1]

$$\mathcal{M}[f](p) \approx \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{p+\lambda_i},\ -\lambda_1 < \mathcal{R}e(p) < -\beta.$$

Erityisesti jos funktiolla f on origon ympäristössä potenssisarjaesitys $f(t) = \sum_{k\ge 0} f_k t^k$, niin sen kertoimet periaatteessa saadaan muunnoksen

$$\mathcal{M}[f](p) = \sum_{k\ge 0} \frac{f_k}{p+k}$$

residyistä navoissa $p = 0, -1, -2, \ldots$

[1]Tarkkaan ottaen $\mathcal{M}[f](p)$ on meromorfifunktio, jonka residy navassa $p = -\lambda_i$ on a_i. Siten esitetty kehitelmä on tarkka vain napojen $p = -\lambda_i$ ympäristössä.

Esimerkki: (Edellisen tuloksen sovellus).

Olkoon $f(t) = e^{-t}$. Tällöin on

$$\mathcal{M}[e^{-t}](p) = \int_0^\infty e^{-t}t^{p-1}dt = \Gamma(p) \ (= \text{“}(p-1)!\text{”}).$$

Koska origon ympäristössä on $e^{-t} = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} t^k$, ja lisäksi $e^{-t} = o\left(t^{-\alpha}\right)$ $\forall \alpha > 0$ kun $t \to 0$ sekä $e^{-t} = o\left(t^{-\beta}\right)$ $\forall \beta > 0$ kun $t \to \infty$, saadaan Γ-funktiolle “meromorfikehitelmä”

$$\begin{aligned} \Gamma(p) &= \mathcal{M}[e^{-t}](p) = \textstyle\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \mathcal{M}[t^k](p) \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{1}{p+k}, \end{aligned}$$

joka on voimassa kun $\mathcal{R}e(p) > 0$.

7.4.2 Mellin-muunnoksen kaavoja

Mellin-muunnoksen inversiokaava voidaan johtaa Laplace- (tai Fourier-) muunnoksen vastaavasta:

Olkoon $\hat{f} = \mathcal{M}[f]$ ja $c \in \mathbb{R}$ jokin funktion $\hat{f}$ analyyttisyysnauhan piste. Tällöin on

$$(\star) \quad f(t) \ = \ \tfrac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \hat{f}(p) t^{-p} dp \ \triangleq \ \int_{(c)} \hat{f}(p) t^{-p} dp.$$

Integraali $(\star)$ voidaan usein laskea $\hat{f}$:n residyistä täydentämällä integrointipolku silmukaksi joko vasempaan tai oikeaan puolitasoon.

Ns. *Mellinin summakaavat* perustuvat inversiokaavaan $(\star)$ ja $\mathcal{M}$-muunnoksen skaalauslakiin:

$$(\star\star) \quad \text{jos } \mathcal{M}[f(t)] = \hat{f}(p), \quad \text{niin } \mathcal{M}[f(at)] = a^{-p}\hat{f}(p).$$

Mellinin summakaavat

(i) inversiokaavan ja lineaarisuuden nojalla: jos $\mathcal{M}[f(t)] = \hat{f}(p)$, niin

$$\sum_{k\geq 1} f(k) = \int_{(c)} \hat{f}(p) \sum_{k\geq 1} k^{-p}\, dp = \int_{(c)} \hat{f}(p)\zeta(p)\, dp;$$

(ii) lisäksi skaalauksen nojalla: jos $\mathcal{M}[f(t)] = \hat{f}(p)$, niin

$$\mathcal{M}\left[\sum_{k\geq 1} \lambda_k f(a_k)\right] = \hat{f}(p) \sum_{k\geq 1} \lambda_k a_k^{-p},$$

$$\text{joten } \sum_{k\geq 1} \lambda_k f(a_k) = \int_{(c)} \hat{f}(p) \left(\sum_{k\geq 1} \lambda_k a_k^{-p} \right) dp.$$

Esimerkki: Summakaavan sovellus.

Summa $S = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Summattavat termit on ensin täydennettävä $\mathbb{R}$-funktioiksi, esimerkiksi $f(t) = \frac{\cos \pi t}{t^2}$.

Suoritetaan Mellin-muunnos (integraali laskettu Maple-ohjelmistolla):

$$\begin{aligned} \hat{f}(p) &= \int_0^\infty \frac{\cos \pi t}{t^2} \cdot t^{p-1} dt &&= \int_0^\infty \cos \pi t \cdot t^{p-3} dt \\ &= \cos\left(\tfrac{p-2}{2} \cdot \pi\right) \cdot \frac{\Gamma(p-2)}{\pi^{p-2}} && (2 < \mathcal{R}e(p) < 3). \end{aligned}$$

Summakaavaa soveltaen:

$$\begin{aligned} S &= -\int_{(c)} \cos \frac{p\pi}{2} \cdot \frac{\Gamma(p-2)}{\pi^{p-2}} \cdot \zeta(p)\, dp \qquad (2 < c = \mathcal{R}e(p) < 3) \\ &= -\int_{(c)} \pi^2 \frac{\Gamma(p-2)}{\Gamma(p)} \cdot 2^{p-1} \zeta(1-p)\, dp \\ &= -\tfrac{\pi^2}{2} \int_{(c)} \frac{2^p}{(p-1)(p-2)} \zeta(1-p)\, dp \\ &= -\tfrac{\pi^2}{2} \sum_{p=0,1,2} \operatorname*{Res}_p = -\frac{\pi^2}{2}\Big(\frac{2^0}{(-1)(-2)} \operatorname*{Res}_{p=0} \zeta(1-p) + \frac{2^1}{(1-2)}\zeta(0) + \frac{2^2}{(2-1)}\zeta(-1) \Big) \\ &= -\tfrac{\pi^2}{2}\left(\tfrac{1}{2} \cdot (-1) - 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) + 4 \cdot \left(-\tfrac{1}{12}\right)\right) = -\tfrac{\pi^2}{2}\left(-\tfrac{1}{2} + 1 - \tfrac{1}{3}\right) = -\tfrac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

Laskussa on hyödynnetty sitä, että ζ-funktiolle pätee (Riemann)

$$\frac{\zeta(p)}{\zeta(1-p)} = \frac{\pi^p \cdot 2^{p-1}}{\Gamma(p) \cos \frac{\pi p}{2}},$$

josta saadaan edelleen

$$\zeta(p) \cos \frac{p\pi}{2} = \zeta(1-p)\pi^p \cdot \frac{2^{p-1}}{\Gamma(p)},$$

sekä lisäksi sitä tietoa, että funktiolla $\zeta(1-p)$ on yksinkertainen napa $p = 0$, jossa sen residy on -1.

Luku 8

Sovelluksia

Esimerkki: Korkeusrajoitetut puut.

Merkitään $t_n^{(h)}$:llä n-solmuisten, enintään h:n korkuisten (juurrettujen, järjestettyjen, nimeämättömien) puiden lukumäärää. Perheelle voidaan kirjoittaa tekijöinti $\mathcal{T}^{(h+1)} \xrightarrow{\sim} \{\bullet\} \times \left(\mathcal{T}^{(h)}\right)^*$; määritellään erikseen $\mathcal{T}^{(0)} \xrightarrow{\sim} \{\bullet\}$. Perheen tavalliselle generoivalle funktiolle pätee siis $t^{(h+1)}(z) = z\left(1 - t^{(h)}(z)\right)^{-1}$ ja $t^{(0)}(z) = z$. Näistä voidaan muodostaa seuraava rekursioyhtälö:

$$\begin{cases} t_{h+1} &= \frac{z}{1-t_h} \\ t_0 &= z \end{cases} \quad \overset{z \neq 1}{\iff} \quad \begin{cases} t_{h+1} - t_{h+1}t_h &= z \\ t_0 &= z \end{cases}$$

Koetetaan linearisoida muuttujanvaihdolla $t_h = a_h/b_h$:

$$\begin{aligned} \frac{a_{h+1}}{b_{h+1}} - \frac{a_{h+1}}{b_{h+1}} \cdot \frac{a_h}{b_h} &= z \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{a_{h+1}}{a_{h+2}} - \frac{a_h}{a_{h+2}} &= z, \qquad \text{jos valitaan } b_h = a_{h+1} \\ \Leftrightarrow \qquad a_{h+1} - a_h &= z a_{h+2} \end{aligned}$$

Laskujen kannalta yksinkertaisemmaksi osoittautuu muuttujanvaihto $t_h = z(a_{h+1}/a_{h+2})$; tällöin saadaan linearisoitu yhtälö

$$\begin{cases} a_{h+1} - z a_h = a_{h+2} \iff a_{h+2} - a_{h+1} + z a_h = 0 \\ a_0 = 0, a_1 = 1 \end{cases}$$

Tämä voidaan ratkaista joko generoivan funktion tai "karakteristisen polynomin" tekniikalla:

$$(\star) \quad q^2 - q + z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1-4z}.$$

Merkitään $q_1 \sim +$ ja $q_2 \sim -$.

$\therefore a_h = c_1 q_1^h + c_2 q_2^h$. Ratkaistaan vakiot c_1 ja c_2:

$$\begin{cases} a_0 &= c_1 + c_2 = 0 \\ a_1 &= \frac{c_1}{2}(1+\sqrt{1-4z}) + \frac{c_2}{2}(1-\sqrt{1-4z}) = \frac{c_1-c_2}{2}\sqrt{1-4z} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ c_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{1-4z}}, \ c_2 = -\tfrac{1}{\sqrt{1-4z}} \\ \Rightarrow \ a_h &= \tfrac{1}{\sqrt{1-4z}}\left(\left(\tfrac{1+\sqrt{1-4z}}{2}\right)^h - \left(\tfrac{1-\sqrt{1-4z}}{2}\right)^h\right) \\ \therefore \ t_h(z) &= z \cdot \frac{a_{h+1}(z)}{a_{h+2}(z)} = z \cdot \frac{q_1^{h+1} - q_2^{h+1}}{q_1^{h+2} - q_2^{h+2}} = \frac{z}{q_1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{h+1}}{1 - \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{h+2}} \\ &= \frac{z}{q_1} \cdot \frac{1-\rho^{h+1}}{1-\rho^{h+2}}, \quad \rho = \frac{q_2}{q_1} = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{1+\sqrt{1-4z}}. \end{aligned}$$

Funktiolla $t_h(z)$ on erikoispisteet

$$\rho^{h+2}(z) = 1 \iff \rho(z) = e^{\frac{2\pi i}{h+2} \cdot k}, \quad k = 0, 1, \ldots, h+1.$$

Näistä lähinnä origoa on yksikäsitteisesti piste $\rho(z_0) = 1 \iff z_0 = \frac{1}{4}$, mutta tämä on poistuva erikoispiste, jossa

$$\lim_{z \to z_0} t_h(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{h+1}{h+2}.$$

Muut erikoispisteet saadaan ratkaisemalla yhtälöt

$$\rho(z_k) = \omega_k, \quad k = 1, 2, \ldots, h+1,$$

missä pisteet $\omega_k = e^{\frac{2\pi i}{h+2} \cdot k}$ ovat kompleksisia $(h+2)$:nsia yksikköjuuria. Lasketaan:

$$\begin{aligned} \rho(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{1+\sqrt{1-4z}} &= \omega \\ \iff \sqrt{1-4z} &= \frac{1-\omega}{1+\omega} \\ \iff z &= \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^2\right) \\ &= \frac{\omega}{(1+\omega)^2} = \frac{\omega}{1+\omega^2+2\omega} = \frac{1}{\frac{1}{\omega}+\omega+2} \\ &= \frac{1}{\omega^*+\omega+2} \qquad \text{(kun } \omega \text{ on yksikköjuuri)} \\ &= \frac{1}{2\,\mathrm{Re}(\omega)+2}. \end{aligned}$$

Muutkin erikoispisteet z_k ovat siten *reaalisia*, muotoa

$$z_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\cos\varphi_k}, \qquad \text{missä } \varphi_k = \frac{2\pi}{h+2} \cdot k, \quad k = 1, 2, \ldots, h+1.$$

Näistä on origoa lähinnä piste

$$z_1 = z_{h+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\cos\varphi_1}, \qquad \text{missä } \varphi_1 = \frac{2\pi}{h+2}.$$

Koska funktio $\rho^{h+2}(z)$ on analyyttinen pisteessä z_1, sillä on z_1:n ympäristössä Taylor-kehitelmä:

$$\begin{aligned} \rho^{h+2}(z) &= \rho^{h+2}(z_1) + (z - z_1) \cdot D\rho^{h+2}(z_1) + \mathcal{O}((z - z_1)^2) \\ &= 1 + (z - z_1) \cdot D\rho^{h+2}(z_1) + \mathcal{O}((z - z_1)^2). \end{aligned}$$

Näin ollen funktio

$$(z - z_1) \cdot \frac{1}{1 - \rho^{h+2}(z)} = \frac{1}{-D\rho^{h+2}(z_1) + \mathcal{O}(z - z_1)}$$

on analyyttinen pisteessä $z = z_1$, mikäli $D\rho^{h+2}(z_1) \neq 0$, ja siis piste z_1 on funktion $t_h(z)$ *yksinkertainen napa*. (Navan $z_1 = z_{h+1}$ "multiplisiteetti" on kuitenkin 2, koska siinä on sattumoisin kaksi origosta samalla etäisyydellä olevaa napaa degeneroitunut yhdeksi. Tämä täytyy ottaa huomioon, kun myöhemmin sovelletaan Lausetta 7.1 kertoimien $t_n^{(h)}$ arviointiin.)

Vastaavan residyn arvoksi saadaan:

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=z_1} t_h(z) &= \frac{z_1}{q_1(z_1)} \cdot \left(1 - \rho^{h+1}(z_1)\right) \cdot \operatorname*{Res}_{z=z_1} \frac{1}{1 - \rho^{h+2}(z_1)} \\ &= \frac{z_1}{q_1(z_1)} \cdot \left(1 - \rho^{h+1}(z_1)\right) \cdot \left(-\frac{1}{D\rho^{h+2}(z_1)}\right). \end{aligned}$$

Lasketaan viimeisessä tekijässä esiintyvä derivaatta:

$$\begin{aligned} D\rho^{h+2}(z) &= (h+2) \cdot \rho^{h+1}(z) \cdot \rho'(z) \\ &= (h+2) \cdot \rho^{h+1}(z) \cdot \frac{4}{\sqrt{1-4z} \cdot (1 + \sqrt{1-4z})^2} \\ &= \frac{4(h+2)}{\sqrt{1-4z}} \cdot \frac{1}{q_1(z)^2} \cdot \rho^{h+1}(z). \end{aligned}$$

Kaikkiaan saadaan siis residylle arvo:

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=z_1} t_h(z) &= \frac{z_1}{q_1(z_1)} \cdot \left(1 - \rho^{h+1}(z_1)\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{1-4z_1}}{4(h+2)} \cdot q_1(z_1)^2 \cdot \frac{1}{\rho^{h+1}(z_1)}\right) \\ &= -\frac{1}{4(h+2)} \cdot z_1 q_1(z_1) \sqrt{1-4z_1} \cdot \left(\frac{1}{\rho^{h+1}(z_1)} - 1\right) \\ &= -\frac{1}{4(h+2)} \cdot z_1 q_1(z_1) \sqrt{1-4z_1} \cdot \left(\rho(z_1) - 1\right), \end{aligned}$$

ja tästä edelleen Lauseen 7.1 nojalla kertoimille $t_n^{(h)}$ arvio:

$$\begin{aligned} t_n^{(h)} &\sim c_1 \cdot (\frac{1}{z_1})^n + c_{h+1} \cdot (\frac{1}{z_{h+1}})^n \\ &= 2c \cdot (\frac{1}{z_1})^n, \end{aligned}$$

missä

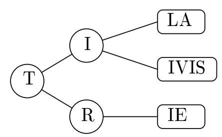
$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\cos\varphi_1}, \\ \varphi_1 &= \frac{2\pi}{h+2}, \\ c &= \frac{1}{4(h+2)} \cdot (1 + \sqrt{1-4z_1})(\sqrt{1-4z_1}) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{1-4z_1}}{1 + \sqrt{1-4z_1}} - 1\right) \\ &= \frac{4z_1 - 1}{2(h+2)} \\ &= \frac{1}{2(h+2)} \cdot \frac{1 - \cos\varphi_1}{1 + \cos\varphi_1}. \end{aligned}$$

Kaikkiaan saadaan siis arvio:

$$t_n^{(h)} \sim \frac{1}{h+2} \cdot \frac{1 - \cos\varphi_1}{1 + \cos\varphi_1} \cdot (2 + 2\cos\varphi_1)^n.$$

Esimerkki: Prefiksipuiden tilantarve.

Prefiksipuu eli *trie* on tietorakenne, jossa talletettavien merkkijonojen yhteiset alkuosat sijoitetaan samoihin solmuihin. Esimerkiksi jonot TILA, TIIVIS ja TRIE talletettaisiin seuraavasti:



Prefiksipuun käyttö tehostaa hakuja jne. Tarkastellaan tässä kuitenkin vain kysymystä *montako (sisä-)solmua odotusarvoisesti* tulee n:n (tasaisesti jakautuneen) satunnaisen l-bittisen binäärijonon muodostamaan prefiksipuuhun:

Merkitään annettua binäärijonojoukkoa t vastaavalle prefiksipuulle sen vasenta alipuuta ("0-alipuuta") t_0:lla ja oikeaa alipuuta ("1-alipuuta") t_1:llä. Kumpikin voi olla tyhjä. Epätriviaalin prefiksipuun sisäsolmujen määrä voidaan nyt laskea kaavasta:

$$\begin{aligned} s[t] &= s[t_0] + s[t_1] + 1 \\ (\star) \qquad &= U[t_1]s[t_0] + U[t_0]s[t_1] + 1, \end{aligned}$$

missä $U[t] \equiv 1$ on tuonnempana $(\star\star)$ ilmenevästä syystä lisätty "tekninen" apumuuttuja.

Merkitään sitten $s_n = \mathbb{E}(s[t] \mid \text{sisältää } n \text{ jonoa})$ ja tämän eksponentiaalista generoivaa funktiota $\hat{s}(z) = \sum_{n\geq 0} s_n \cdot \frac{z^n}{n!}$.

Jos puuhun t talletetut n jonoa ovat tasajakauman mukaan satunnaisia, niin todennäköisyys sille, että puu t_0 sisältää k jonoa ja puu t_1 sisältää $n-k$ jonoa on

$$p_{n,k} = \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Tämä vastaa n:n toiston toistokoetta, jossa yhden toiston "onnistumistodennäköisyys" on $P(\text{"jonon 1. bitti on 0"}) = \frac{1}{2}$.

Jos yleisesti u, v, w ovat joitain puihin liittyviä satunnaismuuttujia ja $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ niiden em. tapaan määritellyt odotusarvojen egf:t, niin

(i) $u[t] = v[t] + w[t] \Rightarrow \hat{u}(z) = \hat{v}(z) + \hat{w}(z)$

(ii) $u[t] = v[t_0] \cdot w[t_1] \Rightarrow \hat{u}(z) = \hat{v}(z/2) \cdot \hat{w}(z/2)$

Todistus. (i) seuraa odotusarvon lineaarisuudesta, (ii):lle pätee

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot v_k \cdot w_{n-k} \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{v_k}{k!} \cdot \left(\frac{1}{2^k}\right) \frac{w_{n-k}}{(n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{2^{n-k}}\right) \\ \Longrightarrow \quad \tfrac{u_n}{n!} z^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{v_k}{k!} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^k \frac{w_{n-k}}{(n-k)!} \cdot \left(\frac{z}{2}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

□

Kaavan $(\star)$ nojalla voidaan nyt muodostaa egf-yhtälö (huom: $\hat{u}(z) = e^z$):

$$(\star\star) \quad \hat{s}(z) = 2e^{z/2}\hat{s}\left(\tfrac{z}{2}\right) + e^z \underbrace{-1 - z}_{s_0 = s_1 = 0}.$$

Tämä voidaan iteroida auki summaksi:

$$\hat{s}(z) = \sum_{k\geq 0} 2^k \left(e^z - \left(1 + \frac{z}{2^k}\right) e^{\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)z}\right)$$

ja ratkaista edelleen kertoimet:

$$s_n = \sum_{k\geq 0} 2^k \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^n - \frac{n}{2^k}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1}\right).$$

Kertoimien asymptotiikan määrittämiseksi sovelletaan approksimaatiota

$$(1-a)^n \approx e^{-an} \text{ (voimassaolo pitäisi tarkastaa)}$$

ja määritellään funktio

$$\sigma(x) = \sum_{k\geq 0} 2^k \left(1 - e^{-\frac{x}{2^k}}\left(1 + \frac{x}{2^k}\right)\right)$$

approksimaatioksi $s_n \approx \sigma(n)$. (Voidaan osoittaa, että $s_n = \sigma(n) + o(\sqrt{n})$.)

Funktio σ on Mellinin summakaavalle (s. 59, (ii)) soveltuvaa muotoa $\sigma(x) = \sum_k \lambda_k f(a_k x)$, joten sen Mellin-muunnos on

$$\mathcal{M}[\sigma](p) = \mathcal{M}[f](p) \cdot \underbrace{\sum_{k\geq 0} 2^k \cdot \left(\frac{1}{2^k}\right)^{-p}}_{2^{(p+1)k}} = \frac{-(p+1)\Gamma(p)}{1 - 2^{p+1}},$$

missä funktion $f(x) = 1 - e^{-x}(1+x)$ Mellin-muunnos on

$$\mathcal{M}[f](p) = \int_0^\infty \left(1 - e^{-x}(1+x)\right) x^{p-1} dx = -(p+1)\Gamma(p).$$

Muunnos on analyyttinen, kun $-2 < \mathcal{Re}(p) < -1$.

Funktion $\sigma^* = \mathcal{M}[\sigma]$ navat analyyttisyysalueen oikealla puolelle kuvaavat funktion $\sigma(x)$ asymptoottista käyttäytymistä kun $x \to \infty$. Navat ovat pisteissä $p = 0$ (funktiosta $\Gamma(p)$) ja $p_k = -1 + (2\pi i/\ln 2) \cdot k$, $k \in \mathbb{Z}$ (nimittäjästä $1 - 2^{p+1}$). Lasketaan residyt:

$$\operatorname*{Res}_{p=0} \sigma^*(p) = \lim_{p\to 0}\left(-\frac{p+1}{1-2^{p+1}}\right) \cdot \operatorname*{Res}_{p=0} \Gamma(p) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{p=-1} \sigma^*(p) &= \lim_{p\to -1} (p+1) \cdot \frac{-(p+1)\Gamma(p)}{1 - 2^{p+1}} \\ &= \lim_{p\to -1} \frac{p+1}{1 - e^{(p+1)\ln 2}} \cdot \underbrace{\left(-(p+1) \cdot \frac{(-1)^1}{1!} \cdot \frac{1}{p+1}\right)}_{1} \\ &= \lim_{p\to -1} \frac{p+1}{1 - e^{(p+1)\ln 2}} \\ &= \lim_{p\to -1} \frac{1}{-\ln 2 e^{(p+1)\ln 2}} \text{ (L'Hospital)} \\ &= -\tfrac{1}{\ln 2} \\ \operatorname*{Res}_{p=p_k} \sigma^*(p) &= \ldots = -\tfrac{1}{\ln 2} \text{ ?} \end{aligned}$$

Mellin-muunnoksen ominaisuuksista seuraa, että jos funktiolla $\sigma(x)$ on asymptoottinen kehitelmä $\sigma(x) \sim \sum_{k=1}^{n} a_k x^{\lambda_k}$, kun $x \to \infty$, niin sen Mellin-muunnoksella $\sigma^*(p)$ on analyyttisyysalueen oikealla puolella navat $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_k$ ja niissä residyt $-a_1, \ldots, -a_k$ (ja kääntäen). Edellisen nojalla voidaan siis päätellä, että satunnaisen n binäärijonon prefiksipuun sisäsolmujen määrä on asymptoottisesti

$$s_n \sim \sigma(n) \sim n \cdot \frac{1}{\ln 2}(1 + Q(\log_2 n)),$$

missä $Q(t)$ on eräs jaksollinen funktio, jaksona 1, $|Q(t)| \leq 1 \, \forall t$ ja

$$n^{-p_k} = n \cdot n^{k \cdot (2\pi i)/\ln 2} = n \cdot e^{2\pi i \cdot \log_2 n \cdot k} = n \cdot (1 + Q_k(\log_2 n)).$$

Hakemisto