

T-79.5201 Diskreetit rakenteet (4 op)

Tentti pe 22.12.2006, 13–16 sali T1

Kuulustelija: Pekka Orponen, puh. (451)5246

LUENTOMONISTE JA HARJOITUSTEHTÄVIEN MALLIRATKAISUT SAA OLLA MUKANA. OHJELMOITAVAT JA MUUT SYMBOLILAS- KENTAKYKYISET LASKIMET KIELLETTY.

1. Ratkaise generoivien funktioiden avulla rekursioyhtälö:

$$\begin{cases} a_0 = 0, & a_1 = 1, \\ a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}, & n \geq 2. \end{cases}$$

7p.

2. *Nelipuu* (engl. quadtree) on juurettu puu, jonka jokaisella solmulla on nolla tai neljä jälkeläistä. Määritä lauseke n -solmuisten nimeämättömien nelipuiden lukumäärälle q_n . (Piirtämällä ja laskemalla todetaan, että $q_1 = 1$, $q_5 = 1$, $q_9 = 4$ jne.)
7p.

3. Määritä seuraavien kombinatoristen perheiden eksponentiaaliset generoivat funktiot:

(a) Permutaatiot, jotka sisältävät ainakin yhden parillisen pituisen syklin. 4p.

(b) Nimetyt verkot (graafit), joiden kunkin solmun asteluku (naapureiden määrä) on 1 tai 2. 4p.

4. Arvioi kohtuulliseksi katsomallasi tarkkuudella seuraavien generoivien funktioiden kertoimien asymptoottista kasvunopeutta. Perusta arviosi suoraan funktioiden ominaisuuksiin, ratkaisematta ao. kertoimia eksplisiittisesti.

(a) $\text{tgf } a(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4z^2}}$, 4p.

(b) $\text{egf } \hat{f}(z) = e^{1-\sqrt{1-z}}$. 4p.

[*Ohje:* Oleta (b)-kohdassa, että funktio \hat{f} on kokonainen ja muutenkin “siisti”. Oletus ei tässä tapauksessa pidä paikkaansa, mutta johtaa oikeaan lopputulokseen.]

Yhteensä 30p.