

T-79.5201 Diskreetit rakenteet, syksy 2006

Harjoitus 7, 22.11.

1. Todista oikeiksi seuraavat Riemann–Stieltjes -integraalin ominaisuudet, edellyttäen että kaavoissa esiintyvät integraalit ovat hyvin määritellyt:

(a) Lineaarisuus:

$$\begin{aligned}\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg &= c_1 \int_a^b f_1 dg + c_2 \int_a^b f_2 dg, \\ \int_a^b f d(c_1 g_1 + c_2 g_2) &= c_1 \int_a^b f dg_1 + c_2 \int_a^b f dg_2.\end{aligned}$$

(b) Yhteys Riemann-integraaliin: jos funktio g on jatkuvasti derivoituva, niin

$$\int_a^b f(t) dg(t) = \int_a^b f(t)g'(t) dt.$$

2. Olkoot f ja g jatkuvia funktioita ja $a, b \in \mathbf{Z}$. Todista oikeiksi seuraavat kaavat, edellyttäen että niissä esiintyvät integraalit ovat hyvin määritellyt:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t) dg(\lceil t \rceil) &= \sum_{a \leq k < b} f(k) \Delta g(k), & \Delta g(k) &= g(k+1) - g(k); \\ \int_a^b f(\lceil t \rceil) dg(t) &= \sum_{a < k \leq b} f(k) \nabla g(k), & \nabla g(k) &= g(k) - g(k-1).\end{aligned}$$

Totea edellisten kaavojen nojalla oikeaksi seuraava “osittaissummaussääntö”:

$$\sum_{a \leq k < b} f(k) \Delta g(k) = \int_a^b f(k)g(k) - \sum_{a < k \leq b} g(k) \nabla f(k).$$

3. Arvioi Eulerin summakaavan avulla seuraavia summia:

- (a) Summa $\sum_{1 \leq k < n} k^{1/2}$ tarkkuudella $O(1)$.
- (b) Summa $\sum_{1 \leq k < n} k^r$, $r \in \mathbf{N}$, tarkasti.