

T-79.5201 Diskreetit rakenteet, syksy 2006

Harjoitus 4, 25.10. [Huom. päivä!]

1. Painotetun kombinatorisen perheen $\mathcal{A} = (A, w_A)$ “multipotenssi” $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = (C, w_C)$ määritellään seuraavasti. Multipotenssiperheen perusjoukon C muodostavat kaikki A :sta valitut “multijoukot” $\{\alpha_1^{j_1}, \dots, \alpha_k^{j_k}\}$, missä kukin $\alpha_i \in A$ ja yläindeksi j_i merkitsee alkion α_i kertalukua multijoukossaan. Perheen C olioiden painofunktio määritellään:

$$w_C(\{\alpha_1^{j_1}, \dots, \alpha_k^{j_k}\}) = j_1 w_A(\alpha_1) + \dots + j_k w_A(\alpha_k).$$

Osoita, että tämä konstruktio on tgf-kelpoinen, ja että sitä vastaava tgf-operaattori on

$$c(z) = \exp(a(z) + \frac{1}{2}a(z^2) + \frac{1}{3}a(z^3) + \dots).$$

(*Ohje*: Huomaa, että $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \simeq \prod_{\alpha \in A} \{\alpha\}^*$.)

2. Sovella kombinatoristen konstruktioiden tekniikkaa (“operaattorimenetelmää”) seuraavien tavallisten generoivien funktioiden muodostamiseen:
 - (a) Annetun m -alkioisen perusjoukon n -alkioisten osajoukkojen määrä potenssikonstruktioita käyttäen. (*Ohje*: Mieti ensin, mikä on m -alkioisen joukon muodostaman kombinatorisen perheen tgf. Montako oliota siihen kuuluu? Mikä on niiden painojakauma?)
 - (b) Annetun m -alkioisen perusjoukon n -alkioisten “multiosajoukkojen” (toisteisten n -valintojen) määrä edellisen tehtävän multipotenssikonstruktioita käyttäen.
3. Tarkastellaan n identtisen pallon sijoitteluja k toisistaan erottuvaan lokeroon, so. luvun n järjestettyjä k -kompositioita $n = n_1 + \dots + n_k$. Määritä n :n k -kompositioiden tgf annetulla k , sekä sellaisten k -kompositioiden lukumäärät, joissa: (a) $n_i \geq i$ kaikilla $i = 1, \dots, k$, (b) n ja kaikki n_i :t ovat parillisia, (c) kaikki n_i :t ovat parittomia. (*Vihje*: Annetun k -komposition kukin komponentti n_i voidaan ajatella n_i :n “pallon” tai “ykkösen” muodostamaksi jonoksi.)