

## T-79.5201 Diskreetit rakenteet, syksy 2006

### Harjoitus 3, 11.10.

1. Osoita, että jos  $a = \langle a_n \rangle$ ,  $b = \langle b_n \rangle$  ja  $c = \langle c_n \rangle$  ovat (kompleksisia) lukujonoja, missä  $c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$ , niin jonojen eksponentiaalisten generoivien funktioiden kesken on voimassa suhde  $\hat{c}(z) = \hat{a}(z)\hat{b}(z)$ .
2. Ns. *Bellin luku*  $b_n$  ilmaisee, montako erilaista ositusta (ekvivalenssirelaatiota) voidaan muodostaa  $n$  alkion perusjoukossa. (Toisen lajin Stirlingin lukuja käyttäen voitaisiin siis kirjoittaa  $b_n = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ .) Osoita, että Bellin luvut  $b_n$  toteuttavat rekursioyhtälön

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k, \quad b_0 = 1,$$

ja johda tämän perusteella jonon  $b = \langle b_n \rangle$  eksponentiaalinen generoiva funktio  $\hat{b}(z)$ . (*Vihje:* Derivoi jonon egf-sarja ja ratkaise syntyvä differentiaaliyhtälö.)

3. Olkoot  $\mathcal{A} = (A, w_A)$  ja  $\mathcal{B} = (B, w_B)$  kaksi painotettujen kombinatoristen struktuurien perhettä. Muodostetaan näiden *tulo*  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = (C, w_C)$  määrittelemällä perusjoukossa  $C = A \times B$  painofunktio  $w_C((\alpha, \beta)) = w_A(\alpha) + w_B(\beta)$ . Osoita, että näin määritelty tulokonstruktio on tgf-kelpoinen, so. että tuloperheen struktuurien tgf voidaan laskea suoraan komponenttiperheiden tgf:ista. (*Ohje:* Muodosta tgf-summat yli kuhunkin perheeseen kuuluvien struktuurien, so.  $c(z) = \sum_{\sigma \in C} z^{w_C(\sigma)} = \dots$ )