

T-79.5201 Diskreetit rakenteet, syksy 2006

Harjoitus 2, 4.10.

1. Olkoon $F(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ formaali potenssisarja. Todista seuraavat tulokset:
 - (a) $F' = 0$, jos ja vain jos $F = a_0 = \text{vakio}$;
 - (b) $F' = F$, jos ja vain jos $F = a_0 \cdot \text{Exp}(X)$.
2. Olkoot $F(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, $G(X) = \sum_{m \geq 0} b_m X^m$ ja $F_i(X) = \sum_{k \geq 0} c_{ik} X^k$ ($i = 0, 1, \dots$) formaaleja potenssisarjoja. Todista seuraavat sarjojen tulon, äärettömän summan ja yhdistetyn sarjan derivointia koskevat säännöt:

$$\begin{aligned} D F(X)G(X) &= F'(X)G(X) + F(X)G'(X), \\ D \sum_{i \geq 0} F_i(X) &= \sum_{i \geq 0} F'_i(X), \\ D G(F(X)) &= G'(F(X)) \cdot F'(X). \end{aligned}$$

Mitkä sarjojen kertoimia koskevat ehdot rajoittavat näiden sääntöjen soveltamista?

3. Olkoot $F(X) = \sum_{n \geq 1} a_n X^n$ ja $G(X) = \sum_{m \geq 1} b_m X^m$ formaaleja potenssisarjoja, joilla on $a_0 = b_0 = 0$ ja $a_1, b_1 \neq 0$. Osoita, että jos $F(G(X)) = X$, niin myös $G(F(X)) = X$. (Siten on annettulla sarjalla F samat "oikea" ja "vasen" käänteisarja $G = F^{[-1]}$.) Määritä formaalisti sarjan $\text{Ln}(1+X) = (\text{Exp}(X) - 1)^{[-1]}$ kolme ensimmäistä kerrointa.