

T-79.5201 Diskreetit rakenteet, syksy 2006

Harjoitus 1, 27.9.

1. Ratkaise seuraavat rekursioyhtälöt generoivien funktioiden avulla:

(a)

$$\begin{cases} a_0 = 0, & a_1 = 1, \\ a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, & n \geq 2; \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} b_0 = 0, & b_1 = 1, \\ b_n = 4b_{n-1} - 5b_{n-2}, & n \geq 2. \end{cases}$$

2. Olkoon $\langle a_k \rangle = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ reaalityttöjono ja $a(x)$ sen reaalityttö generoiva funktio (so. pidetään tässä myös muuttujaa x reaalityttöarvoisena). Oletetaan, että potenssisarja $\sum_{k \geq 0} a_k x^k$ suppenee jossakin origon ympäristössä. Minkä lutyttöjonojen generoivia funktioita ovat tällöin samassa origon ympäristössä määritellyt funktiot $a'(x)$ ja $\int_0^x a(t) dt$? Määritä tämän perusteella jonojen $\langle 0, 1, 2, \dots \rangle$ ja $\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \rangle$ (reaalityttö) generoivat funktiot.
3. Ns. *toisen lajin Stirlingin luku* $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ ilmaisee, monellako tavalla n alkion perusjoukko voidaan osittaa k epätyhjään luokkaan. (Ks. kurssi "Diskreetin matematiikan perusteet".) Luvut toteuttavat rekursioyhtälön

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}, \quad \text{kun } (n, k) \neq (0, 0); \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right\} = 1.$$

Muodosta tämän yhtälön avulla generoiva funktio $S_k(z)$ jonolle $\langle s_n \rangle$, missä $s_n = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ (so. Stirlingin luvut annetulla kiinteällä k :n arvolla). Johda edelleen funktiosta $S_k(z)$ jokin arvio Stirlingin lukujen $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ kasvunopeudelle n :n suhteen.