T-79.5101 **kevät 2007**

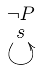
Laskennallisen logiikan jatkokurssi

Laskuharjoitus 4

Ratkaisut

1. Vastaesimerkiksi kelpaa malli

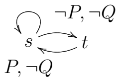
   $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s\}$, $R = \{\langle s, s\rangle\}$, ja $v(s, P) = \text{false}$.

   $\mathcal{M} \models \Box P \to \Diamond P$ pätee (koska $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P$), ja $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\neg P$ pätee myös, koska $\langle s, s\rangle \in R$, $\mathcal{M}, s \Vdash \neg P$, eikä s:llä ole muita seuraajia R-relaatiossa. Edelleen myös $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\Box\neg P$ pätee. Koska kuitenkin $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P$ (eikä s:llä ole muita seuraajia R-relaatiossa), ei $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\Box P$ päde. Siis $\mathcal{M}$ on vastaesimerkki.

   (Vastaesimerkit eivät yleisesti ole yksikäsitteisiä: samalla tavalla voitaisiin tarkistaa, että myös mallit $\mathcal{M}' = \langle S', R', v'\rangle$, missä $S' = \{s', t'\}$, $R' = \{\langle s', t'\rangle, \langle t', s'\rangle\}$ ja $v(s', P) = v(t', P) = \text{false}$ ja $\mathcal{M}'' = \langle S'', R'', v''\rangle$, $S'' = \{s'', t'', u''\}$, $R'' = \{\langle s'', t''\rangle, \langle t'', u''\rangle, \langle u'', t''\rangle\}$ ja $v''(s'', P) = v''(t'', P) = \text{true}$, $v''(u'', P) = \text{false}$, ovat vastaesimerkkejä loogiselle seuraavuudelle maailmoissa s' ja s'' vastaavasti.)

2. $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle, \langle t, s\rangle\}$, $v(s, P) =$ true ja $v(s, Q) = v(t, P) = v(t, Q) = \text{false}$.

   $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond P \vee \Diamond Q$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash \Diamond P \vee \Diamond Q$ pätevät (koska $\mathcal{M}, s \Vdash P$, $\langle s, s\rangle \in R$ ja $\langle t, s\rangle \in R$), ja $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box P$ pätee, sillä $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash P$. Kuitenkin $\mathcal{M}, s \nVdash \Diamond Q$, sillä $\mathcal{M}, s' \nVdash Q$ kaikille $s' \in S$, joille $\langle s, s'\rangle \in R$. Siis $\mathcal{M}$ on (eräs) vastaesimerkki.

3. Oletetaan, että
   $$\Sigma \cup \{P\} \not\models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow Q.$$
   Silloin on olemassa $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ siten, että
   $$\mathcal{M} \models \Sigma \cup \{P\}$$

   ja
   $$\exists s \in S: \quad \forall \varphi \in \Upsilon : \mathcal{M}, s \Vdash \varphi, \text{ mutta } \mathcal{M}, s \nVdash Q.$$
   Erityisesti $\mathcal{M}, t \Vdash P$ kaikilla $t \in S$, joten
   $$\mathcal{M}, s \Vdash P \wedge \Box P \wedge \Box\Box P \wedge \Box\Box\Box P.$$
   Koska myös $\mathcal{M} \models \Sigma$ pätee, seuraa, että
   $$\Sigma \not\models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P \wedge \Box P \wedge \Box\Box P \wedge \Box\Box\Box P \to Q.$$

4. a) Oletetaan, että kehys $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ on transitiivinen, mutta lause $\Box P \to \Box\Box P$ ei ole pätevä kehyksessä. On siis olemassa kehykseen $\mathcal{F}$ perustuva malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ ja maailma $s \in S$ siten, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P \to \Box\Box P$. Tällöin $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$, mutta $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Box P$. Jälkimmäisestä vaatimuksesta seuraa, että on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash \Box P$. Edelleen päätellään, että on olemassa $u \in S$, jolle $\langle t, u\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, u \nVdash P$. Koska $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\langle t, u\rangle \in R$, seuraa nyt kehyksen $\mathcal{F}$ transitiivisuudesta, että $\langle s, u\rangle \in R$. Koska siis $\langle s, u\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, u \nVdash P$, $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P$, mistä seuraa ristiriita, sillä edellä oletettiin, että $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$. Lause $\Box P \to \Box\Box P$ on siis pätevä kehyksessä.

   b) Oletetaan, että kehys $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ on euklidinen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ kehykseen $\mathcal{F}$ perustuva malli ja $s \in S$ jokin sen maailma, jolle pätee $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box P$. Silloin
   $$\mathcal{M}, s \nVdash \Box P,$$
   joten
   $$\exists t \in S : \langle s, t\rangle \in R \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, t \nVdash P.$$
   Oletetaan, että $\langle s, u\rangle \in R$. Koska $\langle s, t\rangle \in R$, kehyksen euklidisuudesta seuraa, että $\langle u, t\rangle \in R$. Siis
   $$\mathcal{M}, u \nVdash \Box P,$$
   ja
   $$\mathcal{M}, u \Vdash \neg\Box P.$$
   Koska u on mielivaltainen s:n seuraaja, $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\neg\Box P$, ja on todistettu
   $$\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box P \to \Box\neg\Box P.$$
   Siten $\neg\Box P \to \Box\neg\Box P$ on pätevä mallissa $\mathcal{M}$, ja koska $\mathcal{M}$ on mielivaltainen kehykseen $\mathcal{F}$ perustuva malli, $\neg\Box P \to \Box\neg\Box P$ on pätevä kehyksessä $\mathcal{F}$.

5. Oletetaan, että $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ on refleksiivinen ja euklidinen. Jos sRt pätee, niin refleksiivisyyden perusteella myös sRs pätee. Euklidisuudesta seuraa nyt, että myös tRs pätee, joten kehys on symmetrinen.

   Oletetaan sitten, että sRt ja tRu ovat voimassa. Symmetrisyyden perusteella tRs pätee, ja euklidisuudesta puolestaan seuraa, että sRu pätee. Kehys on siis transitiivinen.

T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 5
Ratkaisut

Aksiooma K:

$$\text{K:}\quad \Box(P \to Q) \to (\Box P \to \Box Q)$$

Päättelysäännöt:

$$\text{MP:}\quad \frac{P, P \to Q}{Q}$$

$$\text{N:}\quad \frac{P}{\Box P}$$

1. a) Oletetaan, että kehys $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ on sarjallinen, mutta lause $\Box P \to \Diamond P$ ei ole pätevä kehyksessä. On siis olemassa kehykseen $\mathcal{F}$ perustuva malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ ja maailma $s \in S$ siten, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P \to \Diamond P$. Tällöin $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$, mutta $\mathcal{M}, s \nVdash \Diamond P$. Jälkimmäisestä vaatimuksesta seuraa, että ei ole olemassa maailmaa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash P$. Lisäksi oletuksen nojalla kehys $\mathcal{F}$ on sarjallinen, joten on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$. Näin ollen $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P$. Tästä seuraa ristiriita, sillä edellä oletettiin, että $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$. Lause $\Box P \to \Diamond P$ on siis pätevä kehyksessä $\mathcal{F}$.

   b) Oletetaan, että kehys $\mathcal{F} = \langle S, R\rangle$ on heikosti tiheä, mutta lause $\Box\Box P \to \Box P$ ei ole pätevä kehyksessä. On siis olemassa kehykseen $\mathcal{F}$ perustuva malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ ja maailma $s \in S$ siten, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Box P \to \Box P$. Tällöin $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\Box P$, mutta $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P$. Jälkimmäisestä vaatimuksesta seuraa, että on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash P$. Oletuksen nojalla kehys $\mathcal{F}$ on heikosti tiheä, joten on olemassa $u \in S$, jolle $\langle s, u\rangle \in R$ ja $\langle u, t\rangle \in R$. Koska $\langle u, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash P$, seuraa siitä, että $\mathcal{M}, u \nVdash \Box P$. Nyt $\langle s, u\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, u \nVdash \Box P$, joten täytyy olla niin, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Box P$. Tästä seuraa ristiriita, sillä edellä oletettiin, että $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\Box P$. Lause $\Box\Box P \to \Box P$ on siis pätevä kehyksessä $\mathcal{F}$.

2. a)

1.	$P \to (Q \to P)$	[Tautologia]
2.	$\Box\big(P \to (Q \to P)\big)$	[N, 1]
3.	$\Box\big(P \to (Q \to P)\big) \to \big(\Box P \to \Box(Q \to P)\big)$	[K]
4.	$\Box P \to \Box(Q \to P)$	[MP, 2, 3]

b)

1.	$\Box(P \to Q)$	[GP]
2.	$(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$	[Tautologia]
3.	$\Box\big((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)\big)$	[N, 2]
4.	$\Box\big((P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)\big) \to$ $\big(\Box(P \to Q) \to \Box(\neg Q \to \neg P)\big)$	[K]
5.	$\Box(P \to Q) \to \Box(\neg Q \to \neg P)$	[MP, 3, 4]
6.	$\Box(\neg Q \to \neg P)$	[MP, 1, 5]
7.	$\Box(\neg Q \to \neg P) \to (\Box\neg Q \to \Box\neg P)$	[K]
8.	$\Box\neg Q \to \Box\neg P$	[MP, 6, 7]

3. a)

1.	$P \to Q$	[GP]
2.	$\neg Q \to P$	[GP]
3.	$(P \to Q) \to \big((\neg Q \to P) \to Q\big)$	[Tautologia]
4.	$(\neg Q \to P) \to Q$	[MP, 1, 3]
5.	Q	[MP, 2, 4]
6.	$\Box Q$	[N, 5]
7.	$\neg Q \vee S$	[LP]
8.	$(\neg Q \vee S) \to (Q \to S)$	[Tautologia]
9.	$Q \to S$	[MP, 7, 8]
10.	S	[MP, 5, 9]
11.	$\Box Q \to (S \to \Box Q \wedge S)$	[Tautologia]
12.	$S \to \Box Q \wedge S$	[MP, 6, 11]
13.	$\Box Q \wedge S$	[MP, 10, 12]

b)

1.	$Q \to \neg P$	[GP]
2.	$\Box(Q \to \neg P)$	[N, 1]
3.	$\Box(Q \to \neg P) \to (\Box Q \to \Box\neg P)$	[K]
4.	$\Box Q \to \Box\neg P$	[MP, 2, 3]
5.	$\Diamond Q \to \Box Q$	[GP]
6.	$(\Diamond Q \to \Box Q) \to$ $\big((\Box Q \to \Box\neg P) \to (\Diamond Q \to \Box\neg P)\big)$	[Tautologia]
7.	$(\Box Q \to \Box\neg P) \to (\Diamond Q \to \Box\neg P)$	[MP, 5, 6]
8.	$\Diamond Q \to \Box\neg P$	[MP, 4, 7]
9.	$(\neg\Box\neg Q \to \Box\neg P) \to (\neg\Box\neg P \to \Box\neg Q)$	[Tautologia]
10.	$\neg\Box\neg P \to \Box\neg Q$	[MP, 8, 9]
11.	$\Diamond P$	[LP]
12.	$\Box\neg Q$	[MP, 10, 11]

T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 6
Ratkaisut

1. a)

1.	$\langle 1\rangle\neg\big(\Box P \to \Box(Q \to P)\big)$	
2.	$\langle 1\rangle\Box P$	(1)
3.	$\langle 1\rangle\neg\Box(Q \to P)$	(1)
4.	$\langle 1,2\rangle\neg(Q \to P)$	(3)
5.	$\langle 1,2\rangle Q$	(4)
6.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(4)
7.	$\langle 1,2\rangle P$	(2)
	$\otimes$	

b)

1.	$\langle 1\rangle\neg\big(\Box(P \to Q) \to (\neg\Box\neg P \to \neg\Box\neg Q)\big)$				
2.	$\langle 1\rangle\Box(P \to Q)$	(1)			
3.	$\langle 1\rangle\neg(\neg\Box\neg P \to \neg\Box\neg Q)$	(1)			
4.	$\langle 1\rangle\neg\Box\neg P$	(3)			
5.	$\langle 1\rangle\neg\neg\Box\neg Q$	(3)			
6.	$\langle 1\rangle\Box\neg Q$	(5)			
7.	$\langle 1,2\rangle\neg\neg P$	(4)			
8.	$\langle 1,2\rangle P$	(7)			
9.	$\langle 1,2\rangle\neg Q$	(6)			
10.	$\langle 1,2\rangle P \to Q$	(2)			
11.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(10)	12.	$\langle 1,2\rangle Q$	(10)
	$\otimes$			$\otimes$	

c)

1.	$\langle 1\rangle\neg\big((\Box P \land \Box Q) \to \Box(P \land Q)\big)$				
2.	$\langle 1\rangle\Box P \land \Box Q$	(1)			
3.	$\langle 1\rangle\neg\Box(P \land Q)$	(1)			
4.	$\langle 1\rangle\Box P$	(2)			
5.	$\langle 1\rangle\Box Q$	(2)			
6.	$\langle 1,2\rangle\neg(P \land Q)$	(3)			
7.	$\langle 1,2\rangle P$	(4)			
8.	$\langle 1,2\rangle Q$	(5)			
9.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(6)	10.	$\langle 1,2\rangle\neg Q$	(6)
	$\otimes$			$\otimes$	

2. a)

1.	$\langle 1\rangle\neg(\Diamond A \to \Box A)$	
2.	$\langle 1\rangle\Diamond A$	(1)
3.	$\langle 1\rangle\neg\Box A$	(1)
4.	$\langle 1,2\rangle\neg\neg A$	(2; $\Diamond$ on lyhennysmerkintä $\neg\Box\neg$:lle)
5.	$\langle 1,2\rangle A$	(4)
6.	$\langle 1,3\rangle\neg A$	(3)

Ei **K**-pätevä.

$$\begin{tikzcd} & \langle 1,2\rangle\ A \\ \Diamond A,\ \neg\Box A\ \langle 1\rangle \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \langle 1,3\rangle\ \neg A \end{tikzcd}$$

b)

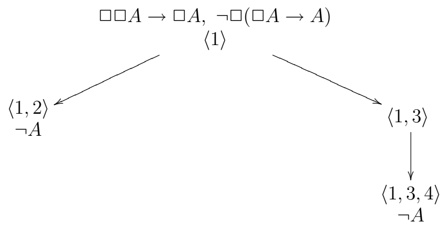
1.	$\langle 1\rangle\neg(\Diamond\Box A \lor \Box\Diamond\neg A)$	
2.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Box A$	(1)
3.	$\langle 1\rangle\neg\Box\Diamond\neg A$	(1)
4.	$\langle 1\rangle\Box\neg\Box A$	(2)
5.	$\langle 1,2\rangle\neg\Diamond\neg A$	(3)
6.	$\langle 1,2\rangle\neg\Box A$	(4)
7.	$\langle 1,2\rangle\Box\neg\neg A$	(5)
8.	$\langle 1,2,3\rangle\neg A$	(6)
9.	$\langle 1,2,3\rangle\neg\neg A$	(7)
	$\otimes$	

Lause on **K**-pätevä.

c)

1.	$\langle 1\rangle\neg\big((\Box\Box A \to \Box A) \to \Box(\Box A \to A)\big)$				
2.	$\langle 1\rangle\Box\Box A \to \Box A$				(1)
3.	$\langle 1\rangle\neg\Box(\Box A \to A)$				(1)
4.	$\langle 1,2\rangle\neg(\Box A \to A)$				(3)
5.	$\langle 1,2\rangle\Box A$				(4)
6.	$\langle 1,2\rangle\neg A$				(4)
7.	$\langle 1\rangle\neg\Box\Box A$	(2)	8.	$\langle 1\rangle\Box A$	(2)
9.	$\langle 1,3\rangle\neg\Box A$	(7)	11.	$\langle 1,2\rangle A$	(8)
10.	$\langle 1,3,4\rangle\neg A$	(9)		$\otimes$	

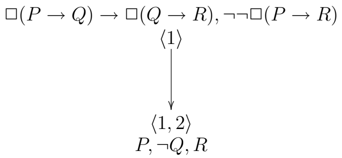
Ei **K**-pätevä.



3. a)

1.	$\langle 1\rangle\neg\Big(\big(\Box(P\to Q)\to\Box(Q\to R)\big)\to\neg\Box(P\to R)\Big)$							
2.	$\langle 1\rangle\Box(P\to Q)\to\Box(Q\to R)$	(1)						
3.	$\langle 1\rangle\neg\neg\Box(P\to R)$	(1)						
4.	$\langle 1\rangle\Box(P\to R)$	(3)						
5.	$\langle 1\rangle\neg\Box(P\to Q)$	(2)				6.	$\langle 1\rangle\Box(Q\to R)$	(2)
7.	$\langle 1,2\rangle\neg(P\to Q)$	(5)						
8.	$\langle 1,2\rangle P$	(7)						
9.	$\langle 1,2\rangle\neg Q$	(7)						
10.	$\langle 1,2\rangle P\to R$	(4)						
11.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(10)	12.	$\langle 1,2\rangle R$	(10)			
	$\otimes$							

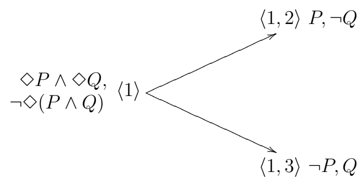
Ei **K**-pätevä.



b)

1.	$\langle 1\rangle\neg\big((\Diamond P\wedge\Diamond Q)\to\Diamond(P\wedge Q)\big)$							
2.	$\langle 1\rangle\Diamond P\wedge\Diamond Q$	(1)						
3.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond(P\wedge Q)$	(1)						
4.	$\langle 1\rangle\Diamond P$	(2)						
5.	$\langle 1\rangle\Diamond Q$	(2)						
6.	$\langle 1\rangle\Box\neg(P\wedge Q)$	(3)						
7.	$\langle 1,2\rangle P$	(4)						
8.	$\langle 1,2\rangle\neg(P\wedge Q)$	(6)						
9.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(8)	10.	$\langle 1,2\rangle\neg Q$	(8)			
	$\otimes$		11.	$\langle 1,3\rangle Q$	(5)			
			12.	$\langle 1,3\rangle\neg(P\wedge Q)$	(6)			
			13.	$\langle 1,3\rangle\neg P$	(11)	13.	$\langle 1,3\rangle\neg Q$	(12)
							$\otimes$	

Ei **K**-pätevä.



c)

1.	$\langle 1\rangle\neg\big(\Box(P\wedge Q)\to(\Box P\wedge\Box Q)\big)$				
2.	$\langle 1\rangle\Box(P\wedge Q)$				(1)
3.	$\langle 1\rangle\neg(\Box P\wedge\Box Q)$				(1)
4.	$\langle 1\rangle\neg\Box P$	(3)	5.	$\langle 1\rangle\neg\Box Q$	(3)
6.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(4)	10.	$\langle 1,2\rangle\neg Q$	(5)
7.	$\langle 1,2\rangle P\wedge Q$	(2)	11.	$\langle 1,2\rangle P\wedge Q$	(2)
8.	$\langle 1,2\rangle P$	(7)	12.	$\langle 1,2\rangle P$	(11)
9.	$\langle 1,2\rangle Q$	(7)	13.	$\langle 1,2\rangle Q$	(11)
	$\otimes$			$\otimes$	

T-79.5101 **kevät 2007**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 7
Ratkaisut

1. a)

1.	$\langle 1\rangle\neg\big(\Diamond(P\vee\Diamond\Box\Box P)\rightarrow\Diamond P\big)$	
2.	$\langle 1\rangle\Diamond(P\vee\Diamond\Box\Box P)$	(1)
3.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond P$	(1)
4.	$\langle 1,2\rangle P\vee\Diamond\Box\Box P$	(2)
5.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(3)

6.	$\langle 1,2\rangle P$	(4)	7.	$\langle 1,2\rangle\Diamond\Box\Box P$	(4)
	$\otimes$		8.	$\langle 1,2,3\rangle\Box\Box P$	(7)
			9.	$\langle 1,2,3\rangle\Box P$	(8) (refleksiivisyys)
			10.	$\langle 1,2,3\rangle P$	(9) (refleksiivisyys)
			11.	$\langle 1,2,3\rangle\neg P$	(3) (transitiivisuus)
				$\otimes$	

b)

1.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\big(\Diamond P\rightarrow\Box(\Diamond P\vee P)\big)$	
2.	$\langle 1\rangle\neg\big(\Diamond P\rightarrow\Box(\Diamond P\vee P)\big)$	(1) (refleksiivisyys)
3.	$\langle 1\rangle\Diamond P$	(2)
4.	$\langle 1\rangle\neg\Box(\Diamond P\vee P)$	(2)
5.	$\langle 1,2\rangle\neg(\Diamond P\vee P)$	(4)
6.	$\langle 1,2\rangle\neg\Diamond P$	(5)
7.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(5)
8.	$\langle 1,2\rangle\neg\big(\Diamond P\rightarrow\Box(\Diamond P\vee P)\big)$	(1)
9.	$\langle 1,2\rangle\Diamond P$	(8)
10.	$\langle 1,2\rangle\neg\Box(\Diamond P\vee P)$	(8)
11.	$\langle 1,2,3\rangle P$	(9)
12.	$\langle 1,2,3\rangle\neg P$	(6)
	$\otimes$	

c)

1.	$\langle 1\rangle\neg\Box\big(\Box(\Box P\wedge Q)\rightarrow\Diamond\Box\Diamond\Diamond(P\vee Q)\big)$	
2.	$\langle 1,2\rangle\neg\big(\Box(\Box P\wedge Q)\rightarrow\Diamond\Box\Diamond\Diamond(P\vee Q)\big)$	(1)
3.	$\langle 1,2\rangle\Box(\Box P\wedge Q)$	(2)
4.	$\langle 1,2\rangle\neg\Diamond\Box\Diamond\Diamond(P\vee Q)$	(2)
5.	$\langle 1\rangle\Box P\wedge Q$	(3) (symmetrisyys)
6.	$\langle 1\rangle\Box P$	(5)
7.	$\langle 1\rangle Q$	(5)
8.	$\langle 1\rangle\neg\Box\Diamond\Diamond(P\vee Q)$	(4) (symmetrisyys)
9.	$\langle 1,3\rangle\neg\Diamond\Diamond(P\vee Q)$	(8)
10.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond(P\vee Q)$	(9) (symmetrisyys)
11.	$\langle 1,3\rangle\neg(P\vee Q)$	(10)
12.	$\langle 1,3\rangle\neg P$	(11)
13.	$\langle 1,3\rangle\neg Q$	(11)
14.	$\langle 1,3\rangle P$	(6)
	$\otimes$	

d)

1.	$\langle 1\rangle\neg\Big(\Box P\rightarrow\Diamond\big((P\rightarrow\Box Q)\rightarrow Q\big)\Big)$	
2.	$\langle 1\rangle\Box P$	(1)
3.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\big((P\rightarrow\Box Q)\rightarrow Q\big)$	(1)
4.	$\langle 1,2\rangle P$	(2) (sarjallisuus)
5.	$\langle 1,2\rangle\neg\big((P\rightarrow\Box Q)\rightarrow Q\big)$	(3)
6.	$\langle 1,2\rangle P\rightarrow\Box Q$	(5)
7.	$\langle 1,2\rangle\neg Q$	(5)

8.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(6)	9.	$\langle 1,2\rangle\Box Q$	(6)
	$\otimes$		10.	$\langle 1,2,3\rangle Q$	(9) (sarjallisuus)
			11.	$\langle 1,2,3\rangle\neg\big((P\rightarrow\Box Q)\rightarrow Q\big)$	(3) (transitiivisuus)
			12.	$\langle 1,2,3\rangle P\rightarrow\Box Q$	(11)
			13.	$\langle 1,2,3\rangle\neg Q$	(11)
				$\otimes$	

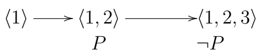
e)

1.	$1\ \neg\Diamond(\Box\Diamond\Box P \to \Box P)$	
2.	$1\ \neg(\Box\Diamond\Box P \to \Box P)$	(1)
3.	$1\ \Box\Diamond\Box P$	(2)
4.	$1\ \neg\Box P$	(2)
5.	$2\ \neg P$	(4)
6.	$2\ \Diamond\Box P$	(3)
7.	$3\ \Box P$	(6)
8.	$2\ P$	(7)
	$\otimes$	

2. Systemaattinen **K**-taulu:

1.	$\langle 1\rangle\neg(\Diamond P \to \Diamond\Box P)$	
2.	$\langle 1\rangle\Diamond P$	(1)
3.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Box P$	(1)
4.	$\langle 1,2\rangle P$	(2)
5.	$\langle 1,2\rangle\neg\Box P$	(3)
6.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Box P$	(3)
7.	$\langle 1,2,3\rangle\neg P$	(5)

Ei **K**-pätevä.

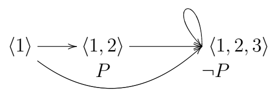


Systemaattinen **K4**-taulu:

1.	$\langle 1\rangle\neg(\Diamond P \to \Diamond\Box P)$	
2.	$\langle 1\rangle\Diamond P$	(1)
3.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Box P$	(1)
4.	$\langle 1,2\rangle P$	(2)
5.	$\langle 1,2\rangle\neg\Box P$	(3)
6.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Box P$	(3)
7.	$\langle 1,2,3\rangle\neg P$	(5)
8.	$\langle 1,2,3\rangle\neg\Box P$	(6) (transitiivisuus)
9.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Box P$	(6)
10.	$\langle 1,2,3,4\rangle\neg P$	(8)
11.	$\langle 1,2,3,4\rangle\neg\Box P$	(9) (transitiivisuus)
12.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Box P$	(9)
13.	$\langle 1,2,3,4,5\rangle\neg P$	(11)
14.	$\langle 1,2,3,4,5\rangle\neg\Box P$	(12) (transitiivisuus)
15.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Box P$	(12)
	$\vdots$	

Systemaattiseen **K4**-tauluun muodostuu ääretön haara, joten taulua ei saada koskaan valmiiksi. Koska tämä ääretön haara ei ole suljettu, seuraa, että lause $\Diamond P \to \Diamond\Box P$ ei ole **K4**-pätevä.

Huomataan, että lauseet $\neg P$ ja $\neg\Box P$ toistuvat taulussa prefikseillä $\langle 1,2,3\rangle$, $\langle 1,2,3,4\rangle$ ja $\langle 1,2,3,4,5\rangle$. Siten näitä prefiksejä vastaavissa vastamallin maailmoissa pätevät täsmälleen samat lauseet. Äärellinen vastamalli voidaan nyt yrittää muodostaa samastamalla kaikki nämä maailmat yhdeksi maailmaksi ja tarkistamalla, onko näin saatu malli lauseen **K4**-pätevyyden vastamalli. Kun tämä tehdään ja huolehditaan siitä, että transitiivisuusehto pysyy voimassa, saadaan malli



Nähdään, että lause $\Diamond P$ toteutuu mallin maailmassa $\langle 1\rangle$, mutta lause $\Diamond\Box P$ ei toteudu tässä maailmassa. Siten malli on vastamalli tehtävän lauseen **K4**-pätevyydelle.

3.

1.	$\langle 1\rangle\neg\big((\Diamond P \to \Diamond\Diamond P) \wedge \neg P\big)$				
2.	$\langle 1\rangle\neg(\Diamond P \to \Diamond\Diamond P)$	(1)	3.	$\langle 1\rangle\neg\neg P$	(1)
6.	$\langle 1\rangle\Diamond P$	(2)	4.	$\langle 1\rangle P$	(3)
7.	$\langle 1\rangle\neg\Diamond\Diamond P$	(2)	5.	$\langle 1\rangle\neg P$	(LP)
8.	$\langle 1,2\rangle P$	(6)		$\otimes$	
9.	$\langle 1,2\rangle\neg\Diamond P$	(7)			
10.	$\langle 1,2\rangle\Box\neg P \to \neg P$	(GP)			
11.	$\langle 1,2\rangle\neg\Box\neg P$	(10)	12.	$\langle 1,2\rangle\neg P$	(10)
13.	$\langle 1,2,3\rangle\neg\neg P$	(11)		$\otimes$	
14.	$\langle 1,2,3\rangle P$	(12)			
15.	$\langle 1,2,3\rangle\neg P$	(9)			
	$\otimes$				