

1. Etsi seuraaville lauseille malli, jossa lause on tosi.

- a) $\neg((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P))$
b) $((P \vee \neg R) \leftrightarrow R) \wedge (P \rightarrow Q)$

2. Tutki, seuraako lause $\neg Q$ loogisesti lausejoukosta

$$\Sigma = \{Q \rightarrow P, R \rightarrow (P \wedge Q), P \rightarrow (Q \wedge R)\}$$

Jos näin on, anna todistus (analyttinen taulu).

Ellei näin ole, anna vastamalli.

3. Määritä lauseen

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \vee Q)$$

konjuktiivinen ja disjuktiivinen normaalimuoto.

4. Etsi seuraaville lauseille malli, jossa lause on tosi.

- a) $\exists x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) \wedge \forall x_1 \forall x_2 (P(x_1, x_2) \rightarrow P(x_2, x_1))$
b) $\forall x_1 \exists x_2 P(x_1, x_2) \wedge \forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1, x_2) \wedge P(x_2, x_3) \rightarrow P(x_1, x_3))$

5. Todista seuraavat lauseet analyttisen taulun menetelmällä.

- a) $(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)) \rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x))$
b) $\exists y (\exists x P(x) \rightarrow P(y))$

1. Merkitään lausetta 'agentti tietää φ :n' $K\varphi$:llä. Esitä seuraavien modaali-logiikan lauseiden merkitys luonnollisella kielellä.

- (a) $\varphi \rightarrow K\varphi$
(b) $\neg K\varphi \rightarrow K\neg K\varphi$
(c) $K(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (K\varphi \rightarrow K\psi)$
(d) $K\varphi \vee K\neg\varphi$

2. Merkitään lausetta 'agentti tietää φ :n' $K\varphi$:llä ja lausetta ' φ on yhtäpitävä agentin tietämyksen kanssa' $L\varphi$:llä. Formalisoi seuraavat lauseet.

- (a) Jos φ on tosi, niin on yhtäpitävää agentin tietämyksen kanssa, että agentti tietää φ :n.
(b) Jos φ ja ψ ovat yhtäpitäviä agentin tietämyksen kanssa, niin $\varphi \wedge \psi$ on yhtäpitävä agentin tietämyksen kanssa.
(c) Jos agentti tietää φ :n, niin φ on yhtäpitävä agentin tietämyksen kanssa.
(d) Jos agentin tietämyksen kanssa on yhtäpitävää, että φ on yhtäpitävä agentin tietämyksen kanssa, niin φ on yhtäpitävä agentin tietämyksen kanssa.

3. Formalisoi seuraavat lauseet modaali-logiikan kielellä.

- (a) Agentti a tietää, että agentti b tietää, että ulkona sataa, mutta agentti b ei tiedä, että agentti a tietää, että agentti b tietää, että ulkona sataa.
(b) Agentti a tietää, että agentti b ei tiedä, sataako ulkona.
(c) Agentti b tietää, että agentti a tietää, sataako ulkona.
(d) Agentti a ei tiedä, onko niin, että agentti b tietää, että agentti a tietää, että ulkona sataa.

4. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ malli, jossa

$$\begin{aligned} S &= \{s_1, s_2, s_3\}, \\ R &= \{\langle s_1, s_2 \rangle, \langle s_1, s_3 \rangle, \langle s_3, s_1 \rangle, \langle s_3, s_3 \rangle\}, \end{aligned}$$

$v(s_1, A) = v(s_2, B) = v(s_3, A) = \text{true}$ ja muulloin $v(s, P) = \text{false}$.

Tutki, päteekö

- (a) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box A$
- (b) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond B \rightarrow \Box \Diamond \top$
- (c) $\mathcal{M}, s_3 \Vdash \Diamond \Diamond \Box \perp$
- (d) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Box(B \vee \Box \Diamond A)$
- (e) $\mathcal{M}, s_1 \Vdash \Diamond(\Box A \wedge \Box \neg A)$.

5. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ malli, jossa

$$\begin{aligned} S &= \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}, \\ R &= \{\langle s_1, s_1 \rangle, \langle s_1, s_2 \rangle, \langle s_1, s_3 \rangle, \langle s_1, s_4 \rangle, \langle s_2, s_3 \rangle, \langle s_3, s_5 \rangle, \langle s_4, s_1 \rangle, \\ &\quad \langle s_4, s_5 \rangle, \langle s_5, s_2 \rangle, \langle s_5, s_5 \rangle\}, \end{aligned}$$

$v(s_1, A) = v(s_4, A) = v(s_5, A) = \text{true}$ ja muulloin $v(s, A) = \text{false}$.

Etsi maailma $s \in S$, jossa

$$\mathcal{M}, s \Vdash \Box \Diamond \Box A$$

pätee.

T-79.5101

Laskennallisen logiikan jatkokurssi

Laskuharjoitus 3

kevät 2007

1. Olkoot A ja B atomilauseita. Osoita, että seuraavat lauseet eivät ole päteviä kaikissa kehyksissä (anna vastaesimerkki).

- a) $\Diamond A \rightarrow \Box A$
- b) $\neg \Box A \rightarrow \Box \neg \Box A$
- c) $\Diamond(\Diamond A \wedge \Box A) \rightarrow \Box \Diamond A$
- d) $(\Diamond A \wedge \Diamond B) \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$

2. Osoita, että millä tahansa lauseella A : $\Diamond \top$ on pätevä mallissa, jos ja vain, jos $\Box A \rightarrow \Diamond A$ on pätevä mallissa.

3. Etsi malli, jossa on neljä mahdollista maailmaa siten, että lause

$$\Box((\Box \Box A \rightarrow \Box \Diamond A) \wedge \Box(\Box A \rightarrow \Diamond A)) \rightarrow (\Diamond(\Box A \rightarrow \Box A) \rightarrow ((\Diamond A \wedge \Box \Diamond A) \vee \Box \Box \neg A))$$

on tosi jossakin mallin maailmassa, kun tiedetään, että lause on tosi mallin $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ maailmassa s_4 , missä

$$\begin{aligned} S &= \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}, \\ R &= \{\langle s_1, s_1 \rangle, \langle s_1, s_2 \rangle, \langle s_1, s_5 \rangle, \langle s_2, s_5 \rangle, \langle s_3, s_2 \rangle, \langle s_3, s_4 \rangle, \langle s_4, s_3 \rangle, \langle s_4, s_5 \rangle\} \end{aligned}$$

ja $v(s_1, A) = v(s_2, A) = v(s_3, A) = \text{true}$, ja $v(s_4, A) = v(s_5, A) = \text{false}$.

4. Olkoon $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ ja $R = \{\langle s_1, s_2 \rangle, \langle s_2, s_3 \rangle, \langle s_3, s_4 \rangle, \langle s_4, s_1 \rangle\}$. Etsi kehys $\langle S', R' \rangle$, jossa on kaksi mahdollista maailmaa siten, että kaikille lauseille P pätee: jos P on pätevä kehyksessä $\langle S, R \rangle$, niin P on pätevä kehyksessä $\langle S', R' \rangle$.