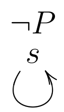
**T-79.5101** **kevät 2006**
**Laskennallisen logiikan jatkokurssi**
**Laskuharjoitus 3**
**Ratkaisut**

1. Vastaesimerkiksi kelpaa malli

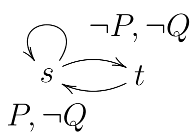
   $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s\}$, $R = \{\langle s, s\rangle\}$, ja $v(s, P) = \text{false}$.

   $\mathcal{M} \models \Box P \to \Diamond P$ pätee (koska $\mathcal{M}, s \not\Vdash \Box P$), ja $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\neg P$ pätee myös, koska $\langle s, s\rangle \in R$, $\mathcal{M}, s \Vdash \neg P$, eikä $s$:llä ole muita seuraajia $R$-relaatiossa. Edelleen myös $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\Box\neg P$ pätee. Koska kuitenkin $\mathcal{M}, s \not\Vdash \Box P$ (eikä $s$:llä ole muita seuraajia $R$-relaatiossa), ei $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond\Box P$ päde. Siis $\mathcal{M}$ on vastaesimerkki.

   (Vastaesimerkit eivät yleisesti ole yksikäsitteisiä: samalla tavalla voitaisiin tarkistaa, että myös mallit $\mathcal{M}' = \langle S', R', v'\rangle$, missä $S' = \{s', t'\}$, $R' = \{\langle s', t'\rangle, \langle t', s'\rangle\}$ ja $v(s', P) = v(t', P) = \text{false}$ ja $\mathcal{M}'' = \langle S'', R'', v''\rangle$, $S'' = \{s'', t'', u''\}$, $R'' = \{\langle s'', t''\rangle, \langle t'', u''\rangle, \langle u'', t''\rangle\}$ ja $v''(s'', P) = v''(t'', P) = \text{true}$, $v''(u'', P) = \text{false}$, ovat vastaesimerkkejä loogiselle seuraavuudelle maailmoissa $s'$ ja $s''$ vastaavasti.)

2. $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$, missä $S = \{s, t\}$, $R = \{\langle s, s\rangle, \langle s, t\rangle, \langle t, s\rangle\}$, $v(s, P) = \text{true}$ ja $v(s, Q) = v(t, P) = v(t, Q) = \text{false}$.

   $\mathcal{M}, s \Vdash \Diamond P \vee \Diamond Q$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash \Diamond P \vee \Diamond Q$ pätevät (koska $\mathcal{M}, s \Vdash P$, $\langle s, s\rangle \in R$ ja $\langle t, s\rangle \in R$), ja $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box P$ pätee, sillä $\langle s, t\rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \not\Vdash P$. Kuitenkin $\mathcal{M}, s \not\Vdash \Diamond Q$, sillä $\mathcal{M}, s' \not\Vdash Q$ kaikille $s' \in S$, joille $\langle s, s'\rangle \in R$. Siis $\mathcal{M}$ on (eräs) vastaesimerkki.

3. Oletetaan, että

   $$\Sigma \cup \{P\} \not\models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow Q.$$

   Silloin on olemassa $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ siten, että

   $$\mathcal{M} \models \Sigma \cup \{P\}$$

ja

$$\exists s \in S : \quad \forall \varphi \in \Upsilon : \mathcal{M}, s \Vdash \varphi, \text{ mutta } \mathcal{M}, s \nVdash Q.$$

Erityisesti $\mathcal{M}, t \Vdash P$ kaikilla $t \in S$, joten

$$\mathcal{M}, s \Vdash P \wedge \Box P \wedge \Box\Box P \wedge \Box\Box\Box P.$$

Koska myös $\mathcal{M} \models \Sigma$ pätee, seuraa, että

$$\Sigma \not\models_{\mathbf{L}} \Upsilon \Longrightarrow P \wedge \Box P \wedge \Box\Box P \wedge \Box\Box\Box P \to Q.$$

4. a) Oletetaan, että kehys $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ on transitiivinen, mutta lause $\Box P \to \Box\Box P$ ei ole pätevä kehyksessä. On siis olemassa kehykseen $\mathcal{F}$ perustuva malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja maailma $s \in S$ siten, että $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P \to \Box\Box P$. Tällöin $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$, mutta $\mathcal{M}, s \nVdash \Box\Box P$. Jälkimmäisestä vaatimuksesta seuraa, että on olemassa $t \in S$ siten, että $\langle s, t \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, t \nVdash \Box P$. Edelleen päätellään, että on olemassa $u \in S$, jolle $\langle t, u \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, u \nVdash P$. Koska $\langle s, t \rangle \in R$ ja $\langle t, u \rangle \in R$, seuraa nyt kehyksen $\mathcal{F}$ transitiivisuudesta, että $\langle s, u \rangle \in R$. Koska siis $\langle s, u \rangle \in R$ ja $\mathcal{M}, u \nVdash P$, $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P$, mistä seuraa ristiriita, sillä edellä oletettiin, että $\mathcal{M}, s \Vdash \Box P$. Lause $\Box P \to \Box\Box P$ on siis pätevä kehyksessä.

   b) Oletetaan, että kehys $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ on euklidinen. Olkoon $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ kehykseen $\mathcal{F}$ perustuva malli ja $s \in S$ jokin sen maailma, jolle pätee $\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box P$. Silloin

$$\mathcal{M}, s \nVdash \Box P,$$

   joten

$$\exists t \in S : \langle s, t \rangle \in R \quad \text{ja} \quad \mathcal{M}, t \nVdash P.$$

   Oletetaan, että $\langle s, u \rangle \in R$. Koska $\langle s, t \rangle \in R$, kehyksen euklidisuudesta seuraa, että $\langle u, t \rangle \in R$. Siis

$$\mathcal{M}, u \nVdash \Box P,$$

   ja

$$\mathcal{M}, u \Vdash \neg\Box P.$$

   Koska $u$ on mielivaltainen $s$:n seuraaja, $\mathcal{M}, s \Vdash \Box\neg\Box P$, ja on todistettu

$$\mathcal{M}, s \Vdash \neg\Box P \to \Box\neg\Box P.$$

   Siten $\neg\Box P \to \Box\neg\Box P$ on pätevä mallissa $\mathcal{M}$, ja koska $\mathcal{M}$ on mielivaltainen kehykseen $\mathcal{F}$ perustuva malli, $\neg\Box P \to \Box\neg\Box P$ on pätevä kehyksessä $\mathcal{F}$.

5. Oletetaan, että $\mathcal{F} = \langle S, R \rangle$ on refleksiivinen ja euklidinen. Jos $sRt$ pätee, niin refleksiivisyyden perusteella myös $sRs$ pätee. Euklidisuudesta seuraa nyt, että myös $tRs$ pätee, joten kehys on symmetrinen.

   Oletetaan sitten, että $sRt$ ja $tRu$ ovat voimassa. Symmetrisyyden perusteella $tRs$ pätee, ja euklidisuudesta puolestaan seuraa, että $sRu$ pätee. Kehys on siis transitiivinen.