T-79.5101 **kevät 2006**
Laskennallisen logiikan jatkokurssi
Laskuharjoitus 12
Ratkaisut

1. Aloitetaan lauseen negaatiosta

$$\neg\Big(\big(Q \lor (P \land \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \rightarrow \mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)\Big).$$

Muunnetaan lause positiiviseen normaalimuotoon:

$$\big(Q \lor (P \land \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \land \neg\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$$

$$\big(Q \lor (P \land \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \land \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)$$

Muodostetaan taulu. Aloitetaan OR-solmusta

$$D_0 = \Big\{\big(Q \lor (P \land \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \land \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)\Big\},$$

jonka AND-seuraajat ovat

$$\begin{aligned}
C_0 = \Big\{&\big(Q \lor (P \land \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \land \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q \lor (P \land \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q, \neg Q, \neg P \lor \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\Big\}\\
C_1 = \Big\{&\big(Q \lor (P \land \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \land \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q \lor (P \land \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q, \neg Q, \neg P \lor \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\Big\}\\
C_2 = \Big\{&\big(Q \lor (P \land \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \land \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q \lor (P \land \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&P \land \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q,\\
&\neg P \lor \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\Big\}\\
C_3 = \Big\{&\big(Q \lor (P \land \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q))\big) \land \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&Q \lor (P \land \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),\\
&P \land \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q,\\
&\neg P \lor \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\Big\}
\end{aligned}$$

Solmut C_0, C_1 ja C_2 voidaan karsia pois, koska ne sisältävät jonkin lauseen ja sen negaation. (Ristiriitaisten AND-solmujen karsintasääntöjä voidaan siis työmäärän vähentämiseksi soveltaa jo AND-solmuja muodostettaessa; voidaan osoittaa, että millään solmulla, joka saataisiin edelleen generoimalla täydellisesti kaikki solmujen C_0, C_1 tai C_2 OR-seuraajat, näiden AND-seuraajat jne., ei ole merkitystä tutkittavana olevan lauseen toteutuvuustarkistuksen kannalta lopullisessa taulussa. Tämä johtuu siitä, että mikään näin syntyvistä solmuista ei sisällä tutkittavana olevaa lausetta, eikä mikään jostakin muusta AND-solmusta lähtevä tulevaisuuspolku voi kulkea ristiriitaisen AND-solmun kautta.)

Koska solmu C_3 sisältää lauseet $\mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)$ ja $\mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)$, solmulle C_3 saadaan OR-seuraaja $D_1 = \big\{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)\big\}$.

D_1:n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned}
C_4 &= D_1 \cup \big\{Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\big\} \\
C_5 &= D_1 \cup \big\{Q, \neg Q, \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\big\} \\
C_6 &= D_1 \cup \big\{P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q, \\
&\qquad\qquad \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \neg P\big\} \\
C_7 &= D_1 \cup \big\{P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), P, \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q), \neg Q, \\
&\qquad\qquad \neg P \vee \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q), \mathbf{EXE}(\neg P\mathbf{B}Q)\big\}
\end{aligned}$$

Koska solmut C_4, C_5 ja C_6 ovat ristiriitaisia, ne voidaan karsia pois. Jäljelle jää solmu C_7, jolle saadaan OR-seuraaja $\big\{\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q), \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q)\big\} = D_1$.

AND-solmu C_7 karsitaan pois, sillä tämä solmu sisältää tulevaisuuslauseen $\mathbf{A}(P\mathbf{U}Q)$, joka ei toteudu solmussa. Tämä johtuu siitä, että taulusta ei voida erottaa solmusta C_7 lähtevää luentokalvoissa esitetyt ehdot täyttävää asyklistä aligraafia, jonka kaikki lehtisolmut sisältäisivät lauseen Q, ja lause P olisi mukana kaikissa muissa aligraafin AND-solmuissa.

Solmun C_7 poistamisen jälkeen voidaan karsintasääntöjen perusteella poistaa järjestyksessä solmut D_1, C_3 ja D_0. Koska jäljelle jäävässä taulussa ei ole yhtään AND-solmua, joka sisältäisi lauseen

$$\Big(Q \vee \big(P \wedge \mathbf{AXA}(P\mathbf{U}Q)\big)\Big) \wedge \mathbf{E}(\neg P\mathbf{B}Q),$$

seuraa, että lause on toteutumaton. Siten lauseen negaatio (alkuperäinen lause) on pätevä.

2. Muunnetaan lause ensin positiiviseen normaalimuotoon.

$$\mathbf{GF}P \rightarrow \mathbf{GF}\neg P$$
$$\neg\mathbf{GF}P \vee \mathbf{GF}\neg P$$
$$\mathbf{FG}\neg P \vee \mathbf{GF}\neg P$$

Korvataan sitten lauseessa esiintyvät LTL:n konnektiivit **F** ja **G** CTL:n konnektiiveilla **AF** ja **AG**, jolloin saadaan CTL-lause

$$\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P.$$

Tämä CTL-lause on toteutuva, jos ja vain, jos alkuperäinen LTL-lause on toteutuva. Tutkitaan siis taulumenetelmällä, onko CTL-lause toteutuva. Taulun juurena on OR-solmu

$$D_0 = \{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P\}.$$

D_0:n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned} C_0 &= \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\big\} \\ C_1 &= \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AXAFAG}\neg P\big\} \\ C_2 &= \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \\ &\qquad \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\big\} \\ C_3 &= \big\{\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \\ &\qquad \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\big\} \end{aligned}$$

C_0:n OR-seuraaja: $D_1 = \{\mathbf{AG}\neg P\}$
C_1:n OR-seuraaja: $D_2 = \{\mathbf{AFAG}\neg P\}$
C_2:n OR-seuraaja: $D_3 = \{\mathbf{AGAF}\neg P\}$
C_3:n OR-seuraaja: $D_4 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P\}$

D_1:n AND-seuraaja: $C_4 = \{\mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\}$

D_2:n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned} C_5 &= \{\mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AG}\neg P, \neg P, \mathbf{AXAG}\neg P\} \\ C_6 &= \{\mathbf{AFAG}\neg P, \mathbf{AXAFAG}\neg P\} \end{aligned}$$

D_3:n AND-seuraajat:

$$\begin{aligned} C_7 &= \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\} \\ C_8 &= \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\} \end{aligned}$$

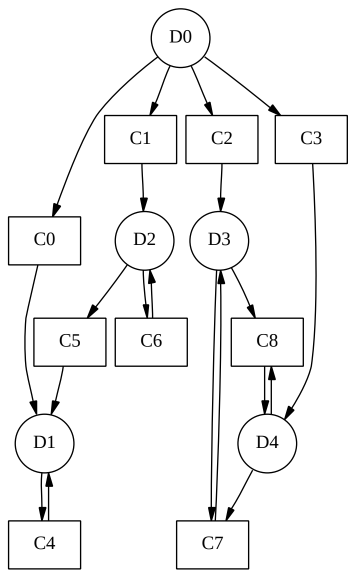
D_4:n AND-seuraajat:

$$C_9 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \neg P\} = C_7$$
$$C_{10} = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P, \mathbf{AXAGAF}\neg P, \mathbf{AXAF}\neg P\} = C_8$$

C_4:n OR-seuraaja: $D_5 = \{\mathbf{AG}\neg P\} = D_1$
C_5:n OR-seuraaja: $D_6 = \{\mathbf{AG}\neg P\} = D_1$
C_6:n OR-seuraaja: $D_7 = \{\mathbf{AFAG}\neg P\} = D_2$
C_7:n OR-seuraaja: $D_8 = \{\mathbf{AGAF}\neg P\} = D_3$
C_8:n OR-seuraaja: $D_9 = \{\mathbf{AGAF}\neg P, \mathbf{AF}\neg P\} = D_4$

Huomaa, että mikään yllä syntyvistä AND-solmuista ei ole ristiriitainen, joten solmujen karsinta ristiriitaisuuden perusteella ei tässä tehtävässä ole mahdollista.

Alustava taulu T_0:



Koska solmu C_4 ei sisällä keskenään ristiriitaisia lauseita eikä myöskään yhtään tulevaisuuslausetta, solmu C_4 jää myös lopulliseen tauluun. Tällöin OR-solmulle D_1 jää tauluun seuraaja, joten solmua D_1 ei myöskään karsita. Kaikki solmun C_0 seuraajat jäävät siis myös lopulliseen tauluun. Solmua C_0 ei karsita, koska se ei sisällä keskenään ristiriitaisia lauseita ja koska sen kaikki tulevaisuuslauseet (tässä tapauksessa vain yksi, $\mathbf{AFAG}\neg P$) toteutuvat alustavassa taulussa.

Seuraa, että T_0:sta saatava lopullinen taulu sisältää AND-solmun C_0, joka sisältää lauseen $\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P$. Todetaan, että tämä CTL-lause on toteutuva.

Solmujen C_0 ja C_4 avulla voidaan nyt muodostaa CTL-lauseelle malli

$$\begin{tikzcd} \underset{\neg P}{C_0} \arrow[r] & \underset{\neg P}{C_4} \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Koska CTL-lause $\mathbf{AFAG}\neg P \vee \mathbf{AGAF}\neg P$ on toteutuva, seuraa, että myös LTL-lause $\mathbf{FG}\neg P \vee \mathbf{GF}\neg P \equiv \mathbf{GF}P \to \mathbf{GF}\neg P$ on toteutuva.