LISÄÄ MODAALILOGIIKOISTA

1. Äärellisen mallin ominaisuus
2. Ratkeavuus
3. Käännös predikaattilogiikkaan
4. Multimodaalilogiikat
5. Laskennallinen vaativuus

M. Fitting: *Basic Modal Logic*, luvut 1.10, 1.12 ja 1.14
(s. 403 – 405, 408 – 410 ja 416 – 419).

1. Äärellisen mallin ominaisuus

Ratkeavuus ja puoli-ratkeavuus

- Jatkossa käytämme laskennan mallina Turingin koneita, joten rinnastamme algoritmit Turingin koneisiin.
- Logiikka $\mathbf{L}$ on ratkeava, jos on olemassa algoritmi, joka ratkaisee syötteeksi annetun lauseen P osalta, onko lause $\mathbf{L}$-pätevä vai ei.
- Jos logiikalla $\mathbf{L}$ on todistusteoria (esim. Hilbert-tyylinen), logiikka on puoli-ratkeava: on olemassa algoritmi, joka pysähtyy ja vastaa kyllä, kun sille annetaan syötteeksi $\mathbf{L}$-pätevä lause P.

  (Muodostetaan kaikki todistukset jollain systemaattisella tavalla.)

$\Longrightarrow$ Pätevien lauseiden joukko on rekursiivisesti numeroituva.

Äärellisen mallin ominaisuus

Määritelmä. Modaalilogiikalla $\mathbf{L}$ on äärellisen mallin ominaisuus, jos jokaisella lauseella P, joka ei ole $\mathbf{L}$-pätevä, on olemassa äärellinen $\mathbf{L}$-malli, jonka jossain tilassa P on epätosi.

- Jos logiikalla on äärellisen mallin ominaisuus, sen ei-pätevien lauseiden joukko on puoli-ratkeava.

  (Muodostetaan systemaattisesti kaikki äärelliset mallit ja tarkistetaan kunkin osalta, onko lause epätosi ko. mallissa.)
- Täten: jos modaalilogiikalla $\mathbf{L}$ on sekä todistusteoria että äärellisen mallin ominaisuus, niin $\mathbf{L}$ on ratkeava.
- Miten äärellisen mallin ominaisuus voidaan käytännössä osoittaa?

$\Longrightarrow$ Filtraatio.

Esimerkki filtraatiosta (modaalilogiikka $\mathbf{K}$)

Oletetaan, ettei lause Q ole $\mathbf{K}$-pätevä. Tällöin on olemassa malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v\rangle$ ja maailma $s_0 \in S$ siten, että $\mathcal{M}, s_0 \not\Vdash Q$.

Muodostetaan filtraatiolla mallista $\mathcal{M}$ äärellinen malli $|\mathcal{M}|$. Olkoon $\mathrm{Sub}(Q)$ lauseen Q kaikkien alilauseiden joukko.

- Määritellään ekvivalenssirelaatio $\sim$ joukolle S: $s \sim t$ jos kaikille $P \in \mathrm{Sub}(Q)$, $\mathcal{M}, s \Vdash P$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash P$.
- Olkoon $|s| = \{t \in S : t \sim s\}$ ja $|S| = \{|s| : s \in S\}$. $|S|$ on äärellinen: korkeintaan 2^n jäsentä, missä n on lauseen Q alilauseiden määrä.
- Olkoon malli $|\mathcal{M}| = \langle |S|, |R|, |v|\rangle$, missä relaatio $|R|$:

  $|s||R||t|$ joss on olemassa $s' \in |s|$ ja $t' \in |t|$ siten, että $s'Rt'$

  ja valuaatio $|v|$: $|v|(|s|, P) = v(s, P)$.

Filtraatio (jatkoa)

Osoitetaan rakenteisella induktiolla, että kaikille $P \in \mathrm{Sub}(Q)$ pätee:

$$\mathcal{M}, s \Vdash P \text{ joss } |\mathcal{M}|, |s| \Vdash P.$$

- P on atomilause: $|v|(|s|, P) = v(s, P)$.
- $\mathcal{M}, s \Vdash \neg P$ joss $\mathcal{M}, s \nVdash P$ joss (IH)

  $|\mathcal{M}|, |s| \nVdash P$ joss $|\mathcal{M}|, |s| \Vdash \neg P$.

  ...
- $\Box P$: ($\Leftarrow$) Olkoon $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P$. Siis löytyy t, jolle sRt ja $\mathcal{M}, t \nVdash P$. Tällöin $|s||R||t|$ ja $|\mathcal{M}|, |t| \nVdash P$ (IH). Siis $|\mathcal{M}|, |s| \nVdash \Box P$.

Filtraatio (päättyy)

- $\Box P$: ($\Rightarrow$) Olkoon $|\mathcal{M}|, |s| \nVdash \Box P$. Täten on olemassa $|t|$, jolle $|s||R||t|$ ja $|\mathcal{M}|, |t| \nVdash P$. Siis $\mathcal{M}, t \nVdash P$ (IH). Täten löytyy $s' \in |s|$ ja $t' \in |t|$, joille $s'Rt'$ ja $\mathcal{M}, t' \nVdash P$. Siis $\mathcal{M}, s' \nVdash \Box P$, jolloin $\mathcal{M}, s \nVdash \Box P$.

Yhteenvetona todettakoon, että

- Kaikille $P \in \mathrm{Sub}(Q)$, $\mathcal{M}, s \Vdash P$ joss $|\mathcal{M}|, |s| \Vdash P$.
- Koska $\mathcal{M}, s_0 \nVdash Q$ ja $Q \in \mathrm{Sub}(Q)$, $|\mathcal{M}|, |s_0| \nVdash Q$.
- Täten logiikalla $\mathbf{K}$ on äärellisen mallin ominaisuus.

Useilla muillakin normaaleilla modaalilogiikoilla on äärellisen mallin ominaisuus (esim. $\mathbf{T}, \mathbf{K4}, \mathbf{S4}, \mathbf{KB}, \mathbf{B}$, $\mathbf{S5}, \mathbf{D}, \mathbf{D4}, \mathbf{DB}, \mathbf{KD45}$).

2. Ratkeavuus

- Jos vastamallien koolle voidaan antaa yläraja, logiikka on ratkeava.
- Näin ei saada kovin tehokkaita ratkaisumenetelmiä.
- Taulumenetelmä tehokkaampi lähestymistapa.

Esimerkki. Logiikka $\mathbf{K}$ voidaan todistaa ratkeavaksi näyttämällä, että edellä annettu logiikan $\mathbf{K}$ ratkaisuproseduuri pysähtyy väistämättä.

Todistuksessa tarvitaan Königin lemmaa:

Lemma. Jos puussa on ääretön määrä solmuja mutta jokaisella solmulla on äärellinen määrä lapsisolmuja, puussa on ääretön haara.

Ratkaisuproseduuri lauseen P K-pätevyydelle

1. Merkitään taulun juureen $\langle 1 \rangle \neg P$.

2. Kunnes taulu on suljettu tai kaikki lauseet on merkitty käytetyiksi:

2.1 Valitaan taulusta ylin käyttämätön solmu σQ.

2.2 Jos Q ei ole literaali, suoritetaan jokaiselle avoimelle σQ kautta kulkevalle haaralle θ jokin seuraavista:

- Jos σQ on muotoa $\sigma\alpha$, jatketaan haaraa θ solmuilla $\sigma\alpha_1$ ja $\sigma\alpha_2$.
- Jos σQ on muotoa $\sigma\beta$, lisätään haaran θ loppuun kaksi lapsisolmua $\sigma\beta_1$ ja $\sigma\beta_2$ (haarautuminen).
- Jos σQ on muotoa $\sigma\neg\Box P$, lisätään haaran θ loppuun solmu $\sigma n \neg P$ jollekin tässä haarassa rajoittamattomalle σn sekä tämän jälkeen $\sigma n X$ kullekin haarassa esiintyvälle $\sigma\Box X$.
- Jos σQ on muotoa $\sigma\Box P$, lisätään kaikille haarassa θ tarjolla oleville σn θ:n loppuun solmu $\sigma n P$, jos tämä ei esiinny θ:ssa.

2.3 Merkitään σQ käytetyksi.

Propositio. Edellä annettu modaalilogiikan $\mathbf{K}$ ratkaisuproseduuri pysähtyy jokaiselle lauseelle P äärellisen askelmäärän jälkeen.

Todistus. Oletetaan, että proseduuri ei pysähdy jollekin lauseelle P.

- Tuloksena on ääretön $\mathbf{K}$-taulu (topologialtaan puurakenne), jonka jokaisella solmulla on äärellinen määrä lapsia.
- Königin lemman perusteella taulussa on ääretön haara θ.
- Haarassa θ on ääretön määrä prefiksoituja lauseita, jotka ovat kaikki erilaisia (oletetaan, että proseduuri lisää prefiksoidun lauseen haaraan vain, jos se ei vielä esiinny siinä).
- Jokaiselle prefiksille σ: jos σQ esiintyy haarassa θ, Q on lauseen P alilause tai sen negaatio. Koska alilauseita on vain äärellinen määrä, jokainen prefiksi voi esiintyä vain äärellisen monta kertaa.
- Täten haarassa θ esiintyy äärettömän monta erilaista prefiksiä.

Todistus (jatkuu)

On kaksi mahdollisuutta:

(i) Haarassa θ on äärettömän monta samanmittaista prefiksiä.

- Olkoon n pienin luonnollinen luku siten, että haarassa on äärettömän monta n mittaista prefiksiä.
- Nyt välttämättä $n \neq 1$, koska ainoa yhdenmittainen prefiksi on $\langle 1 \rangle$ ja se esiintyy äärellisen monta kertaa haarassa θ.
- Kun $n > 1$, ainoa tapa tuottaa n-mittainen prefiksi on käyttää $\neg\Box$- tai $\Box$-sääntöä lauseelle σQ, jossa prefiksin σ mitta on $n-1$.
- Siis jos haarassa on äärettömän monta n-mittaista prefiksiä, siinä on oltava äärettömän monta $(n-1)$-mittaista prefiksiä. Tämä on ristiidassa luvun n valinnan kanssa.

Todistus (jatkuu)

$\Longrightarrow$ Vaihtoehto (i) ei voi toteutua, joten (ii) haarassa θ on äärellisen monta n-mittaista prefiksiä jokaiselle luonnolliselle luvulle n.

- Koska prefiksejä on haarassa θ äärettömän monta, siinä on oltava äärettömän monen mittaisia prefiksejä.
- Näytetään, että tämä on mahdotonta osoittamalla, että jokaiselle haaran lauseelle σQ pätee ominaisuus L: prefiksin σ pituuden summa lauseen Q modaalioperaattoreiden määrän kanssa on aina pienempi tai yhtä suuri kuin $1+m$, missä m lauseen P modaalioperaattoreiden määrä.
- Selvästi (L) pätee taulun juurelle $\langle 1 \rangle \neg P$.
- Jos lause on saatu α- tai β-säännöllä lauseesta, jolle (L) pätee, pätee se myös uudelle prefiksoidulle lauseelle.

Todistus (päättyy)

- Jos lause on saatu $\Box$- tai $\neg\Box$-säännöllä, se on muotoa $\sigma k Q$ ja se on saatu muotoa $\sigma Q'$ olevasta lauseesta. Oletetaan, että (L) pätee lauseelle $\sigma Q'$. Nyt prefiksin σk mitta on 1 + prefiksin σ mitta mutta lauseessa Q on vastaavasti yksi modaalioperaattori vähemmän kuin lauseessa Q'. Siis (L) pätee myös lauseelle $\sigma k Q$.
- Koska (L) pätee kaikille haaran prefiksoiduille lauseille, haarassa voi esiintyä vain prefiksejä, joiden mitta on korkeintaan $m+1$.

$\Longrightarrow$ Vaihtoehto (ii) on mahdoton ja proseduuri pysähtyy kaikille P.

- Vastaava ratkaisumenetelmä toimii käsitellyille modaalilogiikoille, joiden kehykset eivät ole transitiivisia.
- Transitiivisuutta varten tarvitaan vahvempi lopetusehto (ts. ehto sille, milloin haaran laajentaminen voidaan lopettaa).

3. Käännös predikaattilogiikkaan

Modaalilogiikka voidaan kääntää rajoitettuun predikaattilogiikan osajoukkoon.

- Jokaiselle modaalilogiikan atomilauseelle P on vastaava yksipaikkainen predikaattisymboli P.
- Kaksi eri muuttujaa x_1 ja x_2.

  Sopimus: jos x on toinen näistä, x' on toinen.
- Kaksipaikkainen predikaattisymboli R.

Määritelmä. Olkoon τ seuraava kuvaus modaalilauseilta ja muuttujilta predikaattilogiikan lauseille:

1. $\tau(\top,x) = \top$; $\tau(\bot,x) = \bot$;
2. $\tau(P,x) = P(x)$ atomilauseelle P;
3. $\tau(\neg P,x) = \neg\tau(P,x)$;
4. $\tau(P \to Q,x) = \tau(P,x) \to \tau(Q,x)$;
5. $\tau(\Box P,x) = \forall x'(R(x,x') \to \tau(P,x'))$;

Esimerkki. $\tau(\neg\Box P \to \Box\neg\Box P,x_1) = \tau(\neg\Box P,x_1) \to \tau(\Box\neg\Box P,x_1)$
$= \neg\tau(\Box P,x_1) \to \forall x_2(R(x_1,x_2) \to \tau(\neg\Box P,x_2))$
$= \neg(\forall x_2(R(x_1,x_2) \to \tau(P,x_2))) \to \forall x_2(R(x_1,x_2) \to \neg\tau(\Box P,x_2))$
$= \neg(\forall x_2(R(x_1,x_2) \to P(x_2))) \to$
$\quad \forall x_2(R(x_1,x_2) \to \neg(\forall x_1(R(x_2,x_1) \to \tau(P,x_1))))$
$= \neg(\forall x_2(R(x_1,x_2) \to P(x_2))) \to$
$\quad \forall x_2(R(x_1,x_2) \to \neg(\forall x_1(R(x_2,x_1) \to P(x_1))))$.

Kuvaus τ säilyttää semantiikan

Teoreema. Olkoon P mikä tahansa modaalilause.

1. P on **K**-pätevä joss $\forall x_1\tau(P,x_1)$ on pätevä predikaattilogiikassa.
2. $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \Longrightarrow P$ joss $\tau(\Sigma) \models_{\mathrm{cl}} \forall x_1\tau(P,x_1)$,

   missä $\tau(\Sigma) = \{\forall x_1\tau(Q,x_1) \mid Q \in \Sigma\}$ ja

   $\models_{\mathrm{cl}}$ tarkoittaa loogista seuraavuutta predikaattilogiikassa.

- Modaalilogiikka **T**:

  P on **T**-pätevä joss $\{\forall x_1 R(x_1,x_1)\} \models_{\mathrm{cl}} \forall x_1\tau(P,x_1)$.
- Modaalilogiikka **S5**:

  P on **S5**-pätevä joss $\Sigma_{\mathbf{S5}} \models_{\mathrm{cl}} \forall x_1\tau(P,x_1)$

  missä $\Sigma_{\mathbf{S5}} = \{\forall x_1 R(x_1,x_1), \forall x_1\forall x_2(R(x_1,x_2) \to R(x_2,x_1)),$
  $\forall x_1\forall x_2\forall x_3(R(x_1,x_2) \wedge R(x_2,x_3) \to R(x_1,x_3))\}$.

4. Multimodaalilogiikat

Esimerkki. Monen agentin tietämyslogiikka $\mathbf{S5_n}$:

- n agenttia ja vastaavat tietämysoperaattorit $K_i, i = 1,\ldots,n$.

  Esim. väittämiä muotoa $K_1K_2\neg K_1P$.
- Mallit rakenteeltaan monikkoja $\langle S, R_1,\ldots,R_n, v\rangle$:

  $\mathcal{M}, s \Vdash K_iP$ joss $\mathcal{M}, t \Vdash P$ kaikille $t \in S$, joille sR_it.
- (Hilbert) todistusteoria koostuu **S5**-aksioomista kaikille K_i.
- Kaikki tietävät (EP):

  $\mathcal{M}, s \Vdash EP$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash K_iP$ kaikille $i = 1,\ldots,n$.
- Aksiooma: $EP \leftrightarrow K_1P \wedge \cdots \wedge K_nP$.

Yleinen tietäminen (engl. common knowledge): CP

- $\mathcal{M}, s \mathrel{||\!\!-} CP$ joss $\mathcal{M}, s \mathrel{||\!\!-} E^k P$ kaikille $k = 1, 2, \ldots$

  $\Longrightarrow$ $\mathcal{M}, s \mathrel{||\!\!-} CP$ joss $\mathcal{M}, t \mathrel{||\!\!-} P$ kaikille $t \in S$,
  joille maailma t on C-saavutettavissa tilasta s
  (eli on olemassa $k \geq 1$ ja jono $(s =)t_0, t_1, \ldots, t_k (= t)$,
  missä kaikille $j = 0, \ldots, k-1$ pätee $t_j R_i t_{j+1}$ jollekin $i, 1 \leq i \leq n$.)
- Aksiooma: $CP \rightarrow E(P \wedge CP)$.
- Päättelysääntö:

$$\frac{P \rightarrow E(Q \wedge P)}{P \rightarrow CQ}$$

- Esim. $CP \rightarrow K_1 K_2 \cdots K_n P$ on $\mathbf{S5_n}$-pätevä.

5. Laskennallinen vaativuus

Erilaisia tehtävänasetteluja:

- Mallintarkastus (Onko lause tosi annetussa mallissa?)
- Toteutuvuus (Onko lauseella mallia?)
- Pätevyys
- Looginen seuraavuus

Tarkastellaan näistä mallintarkastusta ja toteutuvuutta, koska

1. lause P on pätevä joss $\neg P$ *ei ole* toteutuva ja
2. $\{\} \models_{\mathbf{L}} \{Q_1, \ldots Q_n\} \Longrightarrow P$ joss
   $(Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_n) \rightarrow P$ on pätevä joss
   $Q_1 \wedge \cdots \wedge Q_n \wedge \neg P$ *ei ole* toteutuva.

Mallintarkastamisen laskennallinen vaativuus

- Lauseen totuus annetun mallin annetussa maailmassa on tarkastettavissa polynomisessa ajassa (annetun mallin ja lauseen pituuteen nähden) kaikilla käsittelyillä modaalilogiikoilla.
- Tätä ominaisuutta ei ole kuitenkaan kaikilla modaalilogiikoilla (kuten esim. tietyt temporaalilogiikat).
- Kaikki ongelmat, jotka voidaan ratkaista polynomisessa ajassa, voidaan palauttaa propositionaaliseen mallintarkastukseen.

  Boolen piirin evaluointi muodostaa $\mathbf{P}$-täydellisen ongelman!

Toteutuvuustarkastuksen laskennallinen vaativuus

- Vastaava päätösongelma on $\mathbf{NP}$-täydellinen lauselogiikalle.
- Kaikki modaalilogiikat sisältävät erikoistapauksena lauselogiikan, joten niille toteutuvuusongelma on $\mathbf{NP}$-kova.
- Modaalilogiikoille $\mathbf{S5}, \mathbf{KD45}$ ongelma on $\mathbf{NP}$-täydellinen.

  Näille logiikoille löytyy aina pieni vastamalli (maailmojen määrä $\approx$ alilauseiden määrä), joten toteutuvuus kuuluu luokkaan $\mathbf{NP}$.
- Modaalilogiikoille $\mathbf{K}, \mathbf{T}, \mathbf{S4}$ ongelma on **PSPACE**-täydellinen.

  Vastamalli voi olla eksponentiaalinen lauseen kokoon nähden.
- Modaalilogiikoille $\mathbf{S5_n}, \mathbf{KD45_n}$ ogelma on **PSPACE**-täydellinen.
- Modaalilogiikoille $\mathbf{S5_n^C}, \mathbf{KD45_n^C}$ ongelma on **EXPTIME**-täydellinen.