

MODAALILOGIIKKOJEN TODISTUSTEORIAA

1. Hilbert-tyylinen todistusteoria
2. Virheettömyys
3. Täydellisyys
4. Yleistys lokaaleille premissille
5. Esimerkkejä (**T**, **S5** ja **KD45**)

M. Fitting: *Basic Modal Logic*, luku 1.7 (s. 387 – 391).

1. Hilbert-tyylinen todistusteoria

Modaalilogiikalle **K**:

Klassiset aksiomat: Kaikki tautologiat.

Modaaliaksiomat: Kaikki muotoa

$$\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$$

olevat lauseet.

Modus Ponens -sääntö: $\frac{P, P \rightarrow Q}{Q}$

Välttämättömyyssääntö (N-sääntö): $\frac{P}{\Box P}$

Todistusjärjestelmät yleisesti

Todistusjärjestelmä on (syntaktinen) kalkyyli, jolla osoitetaan, että annettu lause on pätevä/seuraa loogisesti lausejoukosta.

Antaa lähtökohdan päättelyn automatisoinnille.

Erilaisia todistusjärjestelmiä:

- Aksiomaattinen (Hilbert-tyyppinen) todistusteoria
- Luonnollisen päättelyn menetelmät
- Taulumenetelmät
- Resoluutio

Johto ja todistus

(Käsitellään ensin tapausta, jossa ei ole käytössä lokaaleja premissiä.)

Määritelmä. Lauseen P **K**-johto lausejoukosta Σ on äärellinen jono lauseita ϕ_1, \dots, ϕ_n siten, että $\phi_n = P$ ja kaikille $i = 1, \dots, n$

1. $\phi_i \in \Sigma$ tai
2. ϕ_i on joku **K**:n aksiomista tai
3. ϕ_i saadaan Modus Ponens -säännöllä tai N-säännöllä jonon aiemmista lauseista.

Merkintätapa: $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \implies P$ (tai $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} P$)

Lauseen P **K**-todistus on lauseen P **K**-johto tyhjästä lausejoukosta.

Merkintätapa: $\emptyset \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \implies P$ (tai $\vdash_{\mathbf{K}} P$)

Esimerkki

Näytetään lause $T \leftrightarrow \Box T$ **K**-todistuvaksi:

1. T (Taut)
2. $\Box T \rightarrow (T \rightarrow \Box T)$ (Taut)
3. $\Box T$ (N,1)
4. $T \rightarrow \Box T$ (MP,2,3)
5. $T \rightarrow (\Box T \rightarrow T)$ (Taut)
6. $\Box T \rightarrow T$ (MP,1,5)
7. $(\Box T \rightarrow T) \rightarrow ((T \rightarrow \Box T) \rightarrow (T \leftrightarrow \Box T))$ (Taut)
8. $(T \rightarrow \Box T) \rightarrow (T \leftrightarrow \Box T)$ (MP,6,7)
9. $T \leftrightarrow \Box T$ (MP,4,8)

Johdettuja sääntöjä (II)

$$\mathbf{R}\Diamond\text{-sääntö: } \frac{P \rightarrow Q}{\Diamond P \rightarrow \Diamond Q}$$

1. $P \rightarrow Q$
2. $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ (Taut)
3. $\neg Q \rightarrow \neg P$ (MP,1,2)
4. $\Box \neg Q \rightarrow \Box \neg P$ (R,3)
5. $(\Box \neg Q \rightarrow \Box \neg P) \rightarrow (\neg \Box \neg P \rightarrow \neg \Box \neg Q)$ (Taut)
6. $\neg \Box \neg P \rightarrow \neg \Box \neg Q$ (MP,4,5)

Johdettuja sääntöjä (I)

$$\mathbf{R}\text{-sääntö: } \frac{P \rightarrow Q}{\Box P \rightarrow \Box Q}$$

1. $P \rightarrow Q$
2. $\Box(P \rightarrow Q)$ (N,1)
3. $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$ (K)
4. $\Box P \rightarrow \Box Q$ (MP,2,3)

$$\mathbf{Yleistetty R-sääntö: } \frac{P_1 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow Q}{\Box P_1 \wedge \dots \wedge \Box P_n \rightarrow \Box Q}$$

2. Virheettömyys

Todistusmenetelmän virheettömyys:

Jos lause on johdettavissa, se on myös looginen seuraus.

Teoreema. Jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \implies P$, niin $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \emptyset \implies P$
(lyhyemmin merkittynä: jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} P$, niin $\Sigma \models_{\mathbf{K}} P$).

Todistus.

Olkoon lauseelle P **K**-johto $\phi_1, \dots, \phi_n (= P)$ lausejoukosta Σ .

Todistetaan induktiolla $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \phi_i$ (eli ϕ_i on pätevä jokaisessa mallissa, jossa Σ on pätevä) kaikille $i = 1, \dots, n$.

Siis todistetaan induktiolla kaikille $i = 1, \dots, n$, että $\mathbf{C} \models \phi_i$, missä $\mathbf{C} = \{M \mid M \models \Sigma\}$.

Induktiotodistus

- ($i = 1$): Jos $\phi_1 \in \Sigma$, selvästi $\mathbf{C} \models \phi_1$ (joukon \mathbf{C} määritelmä).
Jos ϕ_1 on klassinen tautologia tai muotoa $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$, niin $\mathbf{C} \models \phi_1$ jokaiselle mallijoukolle \mathbf{C} [Mahd. maailmojen semantiikan perusteoreema]
 - ($i > 1$): Kuten yllä, jos $\phi_i \in \Sigma$, on klassinen tautologia tai muotoa $\Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$, niin $\mathbf{C} \models \phi_i$.
Jos ϕ_i on saatu jonon aiemmista lauseista MP- tai N-säännöllä, induktio-oletuksen mukaan ko. aiemmat lauseet ovat \mathbf{C} -päteviä.
Koska \mathbf{C} -pätevien lauseiden joukko on suljettu MP- ja N-säännön suhteen [Mahd. maailmojen semantiikan perusteoreema], $\mathbf{C} \models \phi_i$.
- Siis kaikille $i = 1, \dots, n$, ϕ_i on \mathbf{C} -pätevä, joten $\Sigma \models_{\mathbf{K}} \phi_i$.
Näin ollen $\Sigma \models_{\mathbf{K}} P (= \phi_n)$. ■

(Epä)konsistentit joukot

Määritelmä. Äärellistä joukkoa $\mathbf{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ sanotaan Σ -epäkonsistentiksi, jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$.

Huom. Tyhjä joukko on Σ -epäkonsistentti, jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg\top$.

Määritelmä. Joukkoa \mathbf{A} sanotaan Σ -konsistentiksi, jos mikään sen äärellinen alijoukko ei ole Σ -epäkonsistentti.

Koska oletimme, että lauseelle P ei ole olemassa \mathbf{K} -johtoa lausejoukosta Σ , lausejoukko $\{\neg P\}$ on Σ -konsistentti.

(\emptyset on myös Σ -konsistentti, koska $\neg\top \rightarrow P$ on \mathbf{K} -todistuva/tautologia.)

3. Täydellisyys

Todistusmenetelmän täydellisyys:

Jos lause looginen seuraus, se on myös johdettavissa.

Teoreema. Jos $\Sigma \models_{\mathbf{K}} P$, niin $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} P$.

Todistuksen idea: Oletetaan, että $\Sigma \not\vdash_{\mathbf{K}} P$.

Jatkossa osoitetaan, että $\Sigma \not\vdash_{\mathbf{K}} P$.

Tämä tehdään muodostamalla **kanoninen malli** \mathcal{M} , missä kaikki joukon Σ lauseet ovat päteviä ja kaikilla Q , joille $\Sigma \not\vdash_{\mathbf{K}} Q$, on olemassa mallin maailma s , jossa $\mathcal{M}, s \not\models Q$.

Mallin maailmat ovat **maksimaalisesti konsistentteja** lausejoukkoja, jotka konstruoidaan **Lindenbaumin lemmän** avulla premissijoukosta Σ .

Aputuloksia

Lemma. Jos joukko S on Σ -konsistentti, niin on myös jokainen sen alijoukko $S' \subseteq S$.

Todistus. Jos jokin alijoukko ei olisi Σ -konsistentti, olisi olemassa sen Σ -epäkonsistentti alijoukko A , mutta $A \subseteq S$, joten S ei olisi Σ -konsistentti, ristiriita. ■

Lemma. Jos joukko \mathbf{A} on Σ -konsistentti ja $\neg\Box Z \in \mathbf{A}$, niin $\mathbf{A}^\# \cup \{\neg Z\}$ on myös Σ -konsistentti, missä $\mathbf{A}^\# = \{Q \mid \Box Q \in \mathbf{A}\}$.

Todistus. Oletetaan, että $\mathbf{A}^\# \cup \{\neg Z\}$ on Σ -epäkonsistentti.

Tällöin on olemassa $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathbf{A}^\#$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg Z)$.

(koska $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg Z)$ on tautologia.)

Jatketaan johtoa:

1. $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge \neg Z)$
 2. $\neg\top \vee \neg A_1 \vee \dots \vee \neg A_n \vee Z$ (Prop, 1)
 3. $(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow Z$ (Prop, 2)
 4. $(\Box\top \wedge \Box A_1 \wedge \dots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z$ (GR, 3)
 5. $\Box\top \rightarrow ((\Box A_1 \wedge \dots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z)$ (Prop, 4)
 6. $\top \rightarrow \Box\top$ (Ks. s. 5)
 7. $\top \rightarrow ((\Box A_1 \wedge \dots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z)$ (Prop, 5, 6)
 8. $(\top \wedge \Box A_1 \wedge \dots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box Z$ (Prop, 7)
 9. $\neg(\top \wedge \Box A_1 \wedge \dots \wedge \Box A_n \wedge \neg\Box Z)$ (Prop, 8)
- $\implies \mathbf{A}$ on Σ -epäkonsistentti (ristiriita), joten $\mathbf{A}^\# \cup \{-Z\}$ Σ -konsistentti. ■

- (i) $\mathbf{A} \subseteq \Delta$
- (ii) Kaikille $i = 0, 1, \dots$, joukko Δ_i on Σ -konsistentti.
 Δ_0 on Σ -konsistentti.
 Olkoon Δ_{i-1} on Σ -konsistentti.
 Oletetaan, että Δ_i on Σ -epäkonsistentti. Tällöin
 $\Delta_i = \Delta_{i-1} \cup \{\neg Q_{i-1}\}$ ja $\Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\}$ on Σ -epäkonsistentti.

Siis on olemassa $\{A_1^+, \dots, A_n^+\} \subseteq \Delta_{i-1}$, jolle

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_n^+ \wedge Q_{i-1})$$

sekä $\{A_1^-, \dots, A_n^-\} \subseteq \Delta_{i-1}$, jolle

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_n^- \wedge \neg Q_{i-1}).$$

Lindenbaumin lemma

Määritelmä. Γ on maksimaalisesti Σ -konsistentti, jos Γ on Σ -konsistentti ja kaikki ylijoukot $\Gamma' \supset \Gamma$ ovat Σ -epäkonsistentteja.

Lemma. (Lindenbaum) Jokainen Σ -konsistentti joukko voidaan laajentaa maksimaalisesti Σ -konsistentiksi joukoksi.

Todistus. Olkoon \mathbf{A} Σ -konsistentti. Järjestetään kaikki modaalilauseet jonoon Q_0, Q_1, \dots ja määritellään joukot $\Delta_0, \Delta_1, \dots$ ja Δ seuraavasti:

$$\Delta_0 = \mathbf{A}.$$

$$\Delta_i = \begin{cases} \Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\} & \text{jos } \Delta_{i-1} \cup \{Q_{i-1}\} \text{ } \Sigma\text{-konsistentti} \\ \Delta_{i-1} \cup \{\neg Q_{i-1}\} & \text{muutoin} \end{cases}$$

$$\Delta = \bigcup_{i \geq 0} \Delta_i$$

Jatketaan näihin liittyviä johtoja:

1. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_n^+ \wedge Q_{i-1})$
2. $\neg(\top \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_n^- \wedge \neg Q_{i-1})$
3. $Q_{i-1} \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_n^+)$ (Prop, 1)
4. $\neg Q_{i-1} \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_n^-)$ (Prop, 2)
5. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_n^+) \vee \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_n^-)$ (Prop, 3, 4)
6. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_n^+ \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_n^-)$ (Prop, 5)

$\implies \Delta_{i-1}$ on Σ -epäkonsistentti, ristiriita.

(iii) Unioni Δ on Σ -konsistentti.

Oletetaan, että Δ on Σ -epäkonsistentti.

Siis on olemassa $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \Delta$, jolle

$$\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n).$$

Täten On olemassa $i \geq 0$, jolle $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \Delta_i$.

$\implies \Delta_i$ on Σ -epäkonsistentti, ristiriita.

(iv) Unioni Δ on maksimaalisesti Σ -konsistentti.

Olkoon $\Delta \cup \{Z\}$ Σ -konsistentti jollekin $Z \notin \Delta$.

Koska $Z = Q_i$ jollakin i , $\Delta \cup \{Q_i\}$ on Σ -konsistentti.

Koska $\Delta_i \cup \{Q_i\} \subseteq \Delta \cup \{Q_i\}$, $\Delta_i \cup \{Q_i\}$ on Σ -konsistentti [lemma].

Siis $Z \in \Delta_{i+1} \subseteq \Delta$, ristiriita.

(i-iv) $\implies \Delta$ on maksimaalisesti Σ -konsistentti joukon \mathbf{A} laajennus. ■

(ii) Koska Γ on Σ -konsistentti, $\{Z, \neg Z\} \not\subseteq \Gamma$ ($\neg(\top \wedge Z \wedge \neg Z)$ tautologia). Oletetaan $Z \notin \Gamma$ ja $\neg Z \notin \Gamma$.

Siis on olemassa $\{A_1^+, \dots, A_{n^+}^+\} \subseteq \Gamma$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Z)$ sekä $\{A_1^-, \dots, A_{n^-}^-\} \subseteq \Gamma$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Z)$.

Jatketaan kyseisiä johtoja:

1. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_{n^+}^+ \wedge Z)$
2. $\neg(\top \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_{n^-}^- \wedge \neg Z)$
3. $Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_{n^+}^+)$ (Prop, 1)
4. $\neg Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_{n^-}^-)$ (Prop, 2)
5. $\neg(\top \wedge A_1^+ \wedge \dots \wedge A_{n^+}^+ \wedge A_1^- \wedge \dots \wedge A_{n^-}^-)$ (Prop, 3, 4)

$\implies \Gamma$ on Σ -epäkonsistentti, ristiriita.

Siis joko $Z \in \Gamma$ tai $\neg Z \in \Gamma$ kaikille lauseille Z . ■

Aputuloksia (jatkoa)

Propositio. Kaikille maksimaalisesti Σ -konsistentteille joukoille Γ ,

(i) $\Sigma \subseteq \Gamma$ ja (ii) joko $Z \in \Gamma$ tai $\neg Z \in \Gamma$ kaikille lauseille Z .

Todistus. (i) Oletetaan $Z \in \Sigma - \Gamma$. Tällöin $\Gamma \cup \{Z\}$ on Σ -epäkonsistentti ja on olemassa $\{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \Gamma$, jolle $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge Z)$. Jatketaan kyseistä johtoa:

1. $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n \wedge Z)$
2. $Z \rightarrow \neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$ (Prop, 1)
3. Z (GP)
4. $\neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$ (MP, 2, 3)

Siis $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge A_1 \wedge \dots \wedge A_n)$.

$\implies \Gamma$ on Σ -epäkonsistentti, ristiriita ja $\Sigma \subseteq \Gamma$.

Kanoninen malli

Konstruoidaan kanoninen malli $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ seuraavasti:

- S on kaikkien maksimaalisesti Σ -konsistenttien joukkojen luokka.
- Kaikille $s, t \in S$: sRt joss $s^\# \subseteq t$.
- Kaikille atomilauseille Q : $v(s, Q) = \text{true}$ joss $Q \in s$.

Propositio. Kaikille lauseille Q , kaikille $s \in S$ pätee:

$$\mathcal{M}, s \Vdash Q \text{ joss } Q \in s.$$

Todistus. Käytetään rakenteista induktiota:

- Lause \perp : $\mathcal{M}, s \not\Vdash \perp$.
Oletetaan, että $\perp \in s$. Koska $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} \neg(\top \wedge \perp)$, joukko s on Σ -epäkonsistentti, ristiriita ja $\perp \notin s$.

- Atomilauseet Q mallin \mathcal{M} määritelmän nojalla.
- Modaalilauseet muotoa $\neg Q$: $\mathcal{M}, s \Vdash \neg Q$ joss $\mathcal{M}, s \Vdash Q$ joss [IH] $Q \notin s$ joss [1. propositio] $\neg Q \in s$.
- Modaalilauseet muotoa $\Box Q$:
 (\Leftarrow) Olkoon $\Box Q \in s$. Jos sRt , niin $s^\# \subseteq t$, $Q \in t$ ja $\mathcal{M}, t \Vdash Q$ [IH]. Siis $\mathcal{M}, s \Vdash \Box Q$.
 (\Rightarrow) Olkoon $\Box Q \notin s$. Tällöin $\neg \Box Q \in s$ [1. propositio].
 Nyt $t_0 = s^\# \cup \{\neg Q\}$ on Σ -konsistentti [2. lemma] ja t_0 :lla on maks. Σ -konsistentti laajennus t [Lindenbaum].
 Nyt sRt , koska $s^\# \subseteq t$. Koska $\neg Q \in t_0 \subseteq t$, $Q \notin t$ [1. propositio].
 Siis $\mathcal{M}, t \not\Vdash Q$ [IH] ja $\mathcal{M}, s \not\Vdash \Box Q$. ■

4. Yleistys lokaaleille premissille

Määritelmä. $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} Y \implies P$ tarkoittaa, että on olemassa lauseeseen P päättyvä lausejono, joka koostuu ensin tulevasta *globaalista osasta* ja sitä seuraavasta *lokaalista osasta*.

Gloaalissa osassa jokainen lause

- on \mathbf{K} :n aksioma, kuuluu lausejoukkoon Σ tai
- on saatu jonossa edellä olevista lauseista **Modus Ponens** tai **N-säännöllä**.

Lokaalissa osassa jokainen lause

- on \mathbf{K} :n aksioma, kuuluu lausejoukkoon Y tai
- on saatu jonossa edellä olevista lauseista **Modus Ponens** -säännöllä.

Täydellisyytodistus (yhteenveto)

- Koska $\Sigma \subseteq s$ kaikille $s \in S$ [1. propositio], premissijoukko Σ on pätevä kanonisessa mallissa \mathcal{M} [2. propositio].
 - Koska $\{\neg P\}$ on Σ -konsistentti, on olemassa sen maksimaalisesti Σ -konsistentti laajennus $t \in S$ ja $P \notin t$.
Siis $\mathcal{M}, t \not\Vdash P$ [2. propositio].
 - Koska Σ on pätevä mallissa $\mathcal{M} = \langle S, R, v \rangle$ ja on olemassa $t \in S$ siten, että $\mathcal{M}, t \not\Vdash P$, niin $\Sigma \not\vdash_{\mathbf{K}} P$.
- \implies Edellä annettu modaalilogiikan \mathbf{K} Hilbert-tyylinen todistusjärjestelmä on täydellinen.

Esimerkki

Osoitetaan $\{P, P \rightarrow Q\} \vdash_{\mathbf{K}} \{\Box Q \rightarrow R\} \implies R$:

1. P (GP)
2. $P \rightarrow Q$ (GP)
3. Q (MP, 1, 2)
4. $\Box Q$ (N, 3)
5. $\Box Q \rightarrow R$ (LP)
6. R (MP, 4, 5)

Huom! N-sääntöä ei voi käyttää lokaalissa osassa.

Esim. $\{P, P \rightarrow Q\} \vdash_{\mathbf{K}} \{\Box Q \rightarrow R\} \implies \Box R$ ei päde.

Johtojen ominaisuuksia

- Johdot ovat äärellisiä.
 \implies *Kompaktius* (\vdash):
 Jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} Y \implies P$, niin on olemassa äärelliset joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $Y' \subseteq Y$ siten, että $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} Y' \implies P$.
- MP- ja N-sääntö ovat monotonisia:
 \implies *Monotonisuus* (\vdash):
 Olkoon $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ ja $Y_1 \subseteq Y_2$. Tällöin
 jos $\Sigma_1 \vdash_{\mathbf{K}} Y_1 \implies P$, niin $\Sigma_2 \vdash_{\mathbf{K}} Y_2 \implies P$
- Lokaali deduktioteoreema* on voimassa (\vdash):
 $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} Y \cup \{Q\} \implies P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} Y \implies Q \rightarrow P$.

Virheettömyys

Teoreema. Jos $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} Y \implies P$, niin $\Sigma \models_{\mathbf{K}} Y \implies P$.

Todistus. Oletetaan $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} Y \implies P$.

- Kompaktius (\vdash):
 On olemassa äärelliset joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $Y' = \{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subseteq Y$ siten, että $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} Y' \implies P$.
- Lokaali deduktioteoreema (\vdash):
 $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \implies \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\phi_n \rightarrow P) \dots)$.
- Täydellisysteoreema: $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \emptyset \implies \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \dots \rightarrow (\phi_n \rightarrow P) \dots)$.
- Lokaali deduktioteoreema (\models): $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} Y' \implies P$.
- Monotonisuus (\models): $\Sigma \models_{\mathbf{K}} Y \implies P$.

Täydellisyys

Teoreema. Jos $\Sigma \models_{\mathbf{K}} Y \implies P$, niin $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} Y \implies P$.

Todistus. Oletetaan $\Sigma \models_{\mathbf{K}} Y \implies P$.

- Kompaktius (\models):
 On olemassa äärelliset joukot $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ja $Y' = \{\phi_1, \dots, \phi_n\} \subseteq Y$ siten, että $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} Y' \implies P$.
- Lokaali deduktioteoreema (\models):
 $\Sigma' \models_{\mathbf{K}} \emptyset \implies \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \rightarrow \dots \rightarrow (\phi_n \rightarrow P) \dots)$.
- Täydellisysteoreema: $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} \emptyset \implies \phi_1 \rightarrow (\phi_2 \dots \rightarrow (\phi_n \rightarrow P) \dots)$.
- Lokaali deduktioteoreema (\vdash): $\Sigma' \vdash_{\mathbf{K}} Y' \implies P$.
- Monotonisuus (\vdash): $\Sigma \vdash_{\mathbf{K}} Y \implies P$.

5. Esimerkkejä

- Modaalilogiikan \mathbf{K} todistusteorian ja edellä käsiteltyjen kehysten ominaisuuksia karakterisoivien lauseiden avulla voidaan muodostaa suoraviivaisesti Hilbert-tyyppinen todistusjärjestelmä myös muille kehyslogiikoille.
- Tarkastellaan ensimmäisenä esimerkkinä modaalilogiikkaa \mathbf{T} , jonka kehukset ovat refleksiivisiä.
- Modaalilogiikan \mathbf{T} karakteristinen lause: $\mathbf{T}: \Box P \rightarrow P$.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{T}} Y \implies P$ joss $\Sigma \cup [\mathbf{T}] \models_{\mathbf{K}} Y \implies P$.

\implies (\mathbf{K} :n virheettömyys- ja täydellisysteoreema)

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{T}} Y \implies P$ joss $\Sigma \cup [\mathbf{T}] \vdash_{\mathbf{K}} Y \implies P$.

Modaalilogiikka T

Näin saadaan siis Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle **T**:

Klassiset aksiomat: Kaikki tautologiat.

Modaaliaksiomat: Kaikki muotoa

$$\mathbf{K}: \Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$$

$$\mathbf{T}: \Box P \rightarrow P$$

olevat lauseet.

Modus Ponens -sääntö

N-sääntö

\Rightarrow

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{T}} \Upsilon \Rightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{T}} \Upsilon \Rightarrow P$.

Modaalilogiikka KD45

KD45 on sarjallisten, transitiivisten ja euklidisten kehysten joukko.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \Rightarrow P$ joss $\Sigma \cup \{\mathbf{D}\} \cup \{\mathbf{4}\} \cup \{\mathbf{5}\} \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Rightarrow P$.

Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle **KD45**:

Modaaliaksiomat: Kaikki muotoa

$$\mathbf{K}: \Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$$

$$\mathbf{D}: \Box P \rightarrow \Diamond P$$

$$\mathbf{4}: \Box P \rightarrow \Box \Box P$$

$$\mathbf{5}: \neg \Box P \rightarrow \Box \neg \Box P$$

olevat lauseet.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \Rightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{KD45}} \Upsilon \Rightarrow P$.

Modaalilogiikka S5

Vastaavasti kehyslogiikalle **S5** (ekvivalenttisten kehysten joukko):

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Rightarrow P$ joss $\Sigma \cup \{\mathbf{T}\} \cup \{\mathbf{4}\} \cup \{\mathbf{B}\} \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Rightarrow P$ joss

$\Sigma \cup \{\mathbf{T}\} \cup \{\mathbf{4}\} \cup \{\mathbf{5}\} \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Rightarrow P$ joss $\Sigma \cup \{\mathbf{T}\} \cup \{\mathbf{5}\} \vdash_{\mathbf{K}} \Upsilon \Rightarrow P$.

Hilbert-tyylinen todistusteoria modaalilogiikalle **S5**:

Modaaliaksiomat: Kaikki muotoa

$$\mathbf{K}: \Box(P \rightarrow Q) \rightarrow (\Box P \rightarrow \Box Q)$$

$$\mathbf{T}: \Box P \rightarrow P$$

$$\mathbf{4}: \Box P \rightarrow \Box \Box P$$

$$\mathbf{5}: \neg \Box P \rightarrow \Box \neg \Box P$$

olevat lauseet.

Propositio. $\Sigma \models_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Rightarrow P$ joss $\Sigma \vdash_{\mathbf{S5}} \Upsilon \Rightarrow P$.