



Tehtävä 12.4

Käytetään formalisoinnissa seuraavia predikaatteja:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \text{“tiili } x \text{ on tiilen } y \text{ päällä”}, \text{ ja} \\ P(x) &= \text{“tiili } x \text{ on pöydällä”}. \end{aligned}$$

Lausejoukko on formalisoituna seuraavanlainen:

$$\{\forall x(\exists y T(x, y) \rightarrow \neg P(x)), \forall x(P(x) \vee \exists y T(x, y)), \\ \forall x \forall y(\exists z T(y, z) \rightarrow \neg T(x, y))\}$$

ja haluttu johtopäätös on $\forall x \forall y(T(x, y) \rightarrow P(y))$.

Taulutodistus:

$$\begin{array}{l} 1. T(\forall x(\exists y T(x, y) \rightarrow \neg P(x))) \\ \quad \downarrow \\ 2. T(\forall x(P(x) \vee \exists y T(x, y))) \\ \quad \downarrow \\ 3. T(\forall x \forall y(\exists z T(y, z) \rightarrow \neg T(x, y))) \\ \quad \downarrow \\ 4. E(\forall x \forall y(T(x, y) \rightarrow P(y))) \\ \quad \downarrow \\ 5. E(\forall y(T(c, y) \rightarrow P(y)))^4. x/c \text{ uusi} \\ \quad \downarrow \\ 6. E(T(c, d) \rightarrow P(d))^5. y/d \text{ uusi} \\ \quad \downarrow \\ 7. T(T(c, d))^6. \\ \quad \downarrow \\ 8. E(P(d))^6. \\ \quad \downarrow \\ 9. T(P(d) \vee \exists y T(d, y)) \\ \quad \swarrow \quad \searrow \\ 10. T(P(d))^9. \quad 10. T(\exists y T(d, y))^9. \\ \quad \otimes \quad \downarrow \\ \quad \quad 11. T(T(d, e))^{10. y/e \text{ uusi}} \\ \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad 12. T(\exists z T(d, z) \rightarrow \neg T(c, d))^3. x/c, y/d \\ \quad \quad \swarrow \quad \searrow \\ \quad \quad 13. E(\exists z T(d, z))^{12}. \quad 13. T(\neg T(c, d))^{12}. \\ \quad \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \quad \quad 14. E(T(d, e))^{13. z/e} \quad 14. E(T(c, d))^{13}. \\ \quad \quad \otimes \quad \quad \otimes \end{array}$$

Huomaa: 1) voidaan ekvivalentisti esittää lauseella $\forall x \forall y(T(x, y) \rightarrow \neg P(x))$ ja 3) lauseella $\forall x \forall y \forall z(T(y, z) \rightarrow \neg T(x, y))$. Miltä todistus näyttäisi näitä esitysmuotoja käyttäen?