Luento 9: Predikaattilogiikan semanttiset taulut

1. Taulusäännöt kvanttoreille
2. Tauluihin liittyvät määritelmät
3. Ohjeita todistusten laatimiseen
4. Systemaattinen taulu
5. Vastamallien muodostaminen

1. TAULUSÄÄNNÖT KVANTTOREILLE

- Muotoa $T\,\exists x\varphi(x)$ (tai $E\,\forall x\varphi(x)$) oleva *eksistentiaalinen* solmu tulee hajottaa *kertaalleen* käyttäen jotain *uutta vakiota* c.

$$\begin{array}{ccc} T\,\exists x\varphi(x) & \qquad & E\,\forall x\varphi(x) \\ | & & | \\ T\varphi(c) & & E\varphi(c) \end{array}$$

- Ainoastaan muuttujalla x voi olla vapaita esiintymiä kaavassa $\phi(x)$ eli kvantifioidut kaavat $\exists x\phi(x)$ ja $\forall x\phi(x)$ ovat lauseita.

Määritelmä 12.1 Tarkastellaan semanttisen taulun polkua P juurisolmusta lehtisolmuun, jolla solmu $T\,\exists x\varphi(x)$ / $E\,\forall x\varphi(x)$ esiintyy ja jolle kyseinen solmu on tarkoitus hajottaa. Vakio c on *uusi* polulla P, mikäli se ei esiinny polulla P *hajottamishetkellä*.

Universaaliset solmut

- Muotoa $T\,\forall x\varphi(x)$ (tai vastaavasti $E\,\exists x\varphi(x)$) oleva solmu tulee tarvittaessa hajottaa kaikille *muuttujattomille termeille* t.

$$\begin{array}{ccc} T\,\forall x\varphi(x) & \qquad & E\,\exists x\varphi(x) \\ | & & | \\ T\varphi(t) & & E\varphi(t) \end{array}$$

- Tällaisia solmuja ei välttämättä saada hajotetuksi äärellisellä askelmäärällä, jos muuttujattomia termejä t on ääretön määrä.

Esimerkki Vakiosymboleista c ja d ja funktiosymbolista $f \in \mathcal{F}_1$ voidaan muodostaa muuttujattomat termit

$$c,\ d,\ f(c),\ f(d),\ f(f(c)),\ f(f(d)),\ \ldots$$

2. TAULUIHIN LIITTYVÄT MÄÄRITELMÄT

- Rajaamme *toistaiseksi* yhtäsuuruuspredikaatin "=" tarkastelun ulkopuolelle välttääksemme yhtälöiden käsittelyn.
- Semanttisten taulujen määritelmä (4.2) säilyy ennallaan.
- Polun P solmujen *hajotusehtoja* joudutaan täydentämään
  - *eksistentiaalisten* solmujen $T\,\exists x\varphi(x)$ ja $E\,\forall x\varphi(x)$; sekä
  - *universaalisten* solmujen $T\,\forall x\varphi(x)$ $E\,\exists x\varphi(x)$ osalta.
- Polkuja ja kokonaista semanttista taulua koskevan *valmiuden* ja *ristiriitaisuuden* määritelmät säilyvät muuttumattomina.

Universaalisten solmujen hajotusehto

- Tarkastellaan semanttista taulua τ ja sen juurisolmusta johonkin lehtisolmuun johtavaa polkua P.
- Polun P universaaliset solmut $T\forall x\varphi(x)$ ($E\exists x\varphi(x)$) koskevat kaikkia universumin alkioita ja siksi ne tulee tarvittaessa hajottaa polulle P kaikkien muuttujattomien termien suhteen.
- Mikäli polulla P ei esiinny vakiosymboleita, universaaliset solmut tulee hajottaa ainakin kertaalleen jonkin vakion c suhteen.

Määritelmä 12.3 Polun P solmu $T\forall x\varphi(x)$ (vastaavasti $E\exists x\varphi(x)$) on *hajotettu* polulle P, jos ja vain jos polulla P esiintyy solmu $T\varphi(t)$ (vastaavasti solmu $E\varphi(t)$) kaikille muuttujattomille termeille t, jotka voidaan muodostaa polulla P esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista.

Esimerkki (12.4) valmiista taulusta

1. $T\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$
2. $E(Q(a)\vee Q(b))$
3. $EQ(a)$ 2.
4. $EQ(b)$ 2.
5. $T(P(a)\rightarrow Q(a))$ 1. x/a
6. $EP(a)$ 5. | 6. $TQ(a)$ 5. $\times$
7. $T(P(b)\rightarrow Q(b))$ 1. x/b
8. $EP(b)$ 7. | 8. $TQ(b)$ 7. $\times$

$\Longrightarrow$ $\{\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\}\not\models Q(a)\vee Q(b)$ ja lausejoukko $\{\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))\}$ on toteutuva.

Loogiset päättelytehtävät

- Pätevyyttä ja loogista seuraavuutta tutkitaan predikaattilogiikan semanttisilla tauluilla aivan kuten lauselogiikankin tapauksessa.
- Jos lauseella ϕ on todistus, on ϕ *teoreema*/*todistuva* (merk. $\vdash\phi$).

Määritelmä 4.22 Taulu τ on lauseen ϕ *todistus*, joss taulun τ juurisolmuna on $E\phi$ ja τ on ristiriitainen (ja siten myös valmis).

Määritelmä 4.26 Lause ϕ on *johdettavissa* lausejoukosta $\Sigma=\{\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ (merk. $\Sigma\vdash\phi$), joss juurisolmusta $E(\phi_1\wedge\ldots\wedge\phi_n\rightarrow\phi)$ muodostettu valmis semanttinen taulu on ristiriitainen.

Väite $\Sigma\vdash\phi \iff \Sigma\models\phi$ (virheettömyys ja täydellisyys).

3. OHJEITA TODISTUSTEN LAATIMISEEN

- Lauseen rakenne määrää edelleen, mitä taulusääntöä tulee käyttää!
- Solmujen hajottamisjärjestyksellä voi vaikuttaa taulun kokoon; taulua haarauttavien solmujen hajottamista pyritään viivästämään.
- Universaalisten solmujen taulusäännöissä esiintyvän termin t tilalle valitaan *hajottamishetkellä* (eikä myöhemmin) jokin vakio tai funktio- ja vakiosymboleista rakentuva muuttujaton termi.
- Valitsemalla muuttujattomat termit t sopivasti voidaan taulun valmistumista usein nopeuttaa olennaisesti.

Taulutodistusten erityispiirteitä (I)

Valitaan muuttujattomaksi termiksi t vakio, joka ei esiinny lauseissa.

Esimerkki 12.8 Osoitetaan $\{\forall x P(x)\} \vdash \exists x P(x)$.

$$\begin{array}{c}
1.\ T\,\forall x P(x) \\
| \\
2.\ E\,\exists x P(x) \\
| \\
3.\ TP(c)^{1.\ x/c} \\
| \\
4.\ EP(c)^{2.\ x/c} \\
\times
\end{array}$$

Huomio Tämä on perusteltua, koska universumissa U on aina vähintään yksi alkio $a \in U$, joka voidaan nimetä (eli $c^{\mathcal{S}} = a$).

Taulutodistusten erityispiirteitä (II)

Solmu $T\,\forall x \varphi(x)$ (tai $E\,\exists x \varphi(x)$) joudutaan hajottamaan useasti.

Esimerkki 12.9 Osoitetaan $\{\forall x P(x)\} \vdash P(a) \wedge P(b)$.

$$\begin{array}{c}
1.\ T\,\forall x P(x) \\
| \\
2.\ E(P(a) \wedge P(b)) \\
| \\
3.\ TP(a)^{1.\ x/a} \\
| \\
4.\ TP(b)^{1.\ x/b} \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
5.\ EP(a)^{2.} & 5.\ EP(b)^{2.} \\
\times & \times
\end{array}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
1.\ T\,\forall x P(x) \\
| \\
2.\ E(P(a) \wedge P(b)) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
3.\ EP(a)^{2.} & 3.\ EP(b)^{2.} \\
| & | \\
4.\ TP(a)^{1.\ x/a} & 4.\ TP(b)^{1.\ x/b} \\
\times & \times
\end{array}
\end{array}$$

Taulutodistusten erityispiirteitä (III)

Muuttujien korvaaminen sopivilla muuttujattomilla termeillä.

Esimerkki 12.10 Osoitetaan, että

$$\{\forall x \forall y \forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)), P(a,b), P(b,c)\} \vdash P(a,c).$$

- Solmusta $T\,\forall x \forall y \forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z))$ voidaan johtaa kvanttorisäännöillä 27 erilaista todeksi merkittyä implikaatiota.
- Ristiriidan johtamisen kannalta olennaisia ovat implikaatioista ne, joissa esiintyy atomisia lauseita $P(a,b)$, $P(b,c)$ ja $P(a,c)$.
- Esimerkin tapauksessa tämä johtaa ensimmäiseksi x:n, y:n ja z:n korvaamiseen vakoilla a, b, ja c (näin saatava implikaatio riittää).
- Kaikki muut implikaatiot kasvattavat taulua tarpeettomasti.

Taulutodistus kokonaisuudessaan

$$\begin{array}{c}
1.\ T\,\forall x \forall y \forall z(P(x,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(x,z)) \\
| \\
2.\ TP(a,b) \\
| \\
3.\ TP(b,c) \\
| \\
4.\ EP(a,c) \\
| \\
5.\ T\,\forall y \forall z(P(a,y) \wedge P(y,z) \rightarrow P(a,z))^{1.\ x/a} \\
| \\
6.\ T\,\forall z(P(a,b) \wedge P(b,z) \rightarrow P(a,z))^{5.\ y/b} \\
| \\
7.\ T(P(a,b) \wedge P(b,c) \rightarrow P(a,c))^{6.\ z/c} \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
8.\ E(P(a,b) \wedge P(b,c))^{7.} & 8.\ TP(a,c)^{7.} \\
\swarrow \qquad \searrow & \times \\
\begin{array}{cc}
9.\ EP(a,b)^{8.} & 9.\ EP(b,c)^{8.} \\
\times & \times
\end{array} &
\end{array}
\end{array}$$

Kvanttorisekvenssien käsittely

Jatkossa sallimme seuraavien johdettujen taulusääntöjen käytön kvanttorisekvenssien käsittelyssä:

$$\begin{array}{c} T\,\forall x_1\cdots\forall x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n) \\ | \\ T\,\varphi(t_1,\ldots,t_n) \end{array} \qquad \begin{array}{c} E\,\exists x_1\cdots\exists x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n) \\ | \\ E\,\varphi(t_1,\ldots,t_n) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} T\,\exists x_1\cdots\exists x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n) \\ | \\ T\,\varphi(c_1,\ldots,c_n) \end{array} \qquad \begin{array}{c} E\,\forall x_1\cdots\forall x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n) \\ | \\ E\,\varphi(c_1,\ldots,c_n) \end{array}$$

Yllä $c_1,\ldots,c_n$ ovat ao. taulusääntöjen edellyttämiä *uusia vakioita* ja vastaavasti $t_1,\ldots,t_n$ ovat valittuja *muuttujattomia termejä*.

Taulutodistusten erityispiirteitä (IV)

Solmujen keskinäinen hajotusjärjestys voi olla ratkaisevassa roolissa.

Esimerkki 12.11 $\{\forall xP(x), \forall x(P(x)\rightarrow Q(x)), Q(a)\} \vdash \forall xQ(x)$.

$$\begin{array}{c}
1.\ T\,\forall xP(x) \\ | \\
2.\ T\,\forall x(P(x)\rightarrow Q(x)) \\ | \\
3.\ T\,Q(a) \\ | \\
4.\ E\,\forall xQ(x) \\ | \\
5.\ E\,Q(c)^{4.\ x/c} \\ | \\
6.\ T\,P(c)^{1.\ x/c} \\ | \\
7.\ T\,(P(c)\rightarrow Q(c))^{2.\ x/c} \\
\begin{array}{cc} 8.\ E\,P(c)^{7.} & 8.\ T\,Q(c)^{7.} \\ \times & \times \end{array}
\end{array}$$

4. SYSTEMAATTINEN TAULU

Lauselogiikan keskeiset päättelyongelmat ovat *ratkeavia*:

- Voidaan laatia *deterministinen* Turing-kone T, joka *ratkaisee* pätevien lauseiden kielen VALID $= \{\phi \mid \forall \mathcal{A} \subseteq \mathrm{At}(\phi) : \mathcal{A} \models \phi\}$:
  1. Jos $\phi \in$ VALID, niin T pysähtyy hyväksyvään k.
  2. Jos $\phi \notin$ VALID, niin T pysähtyy hylkäävään e.
- Turing-koneen T noudattama algoritmi voi perustua esim. semanttisiin tauluihin tai resoluutioon.
- Myös looginen ekvivalenssi, looginen seuraavuus ja toteutuvuus ovat lauselogiikan tapauksessa ratkeavia ongelmia.

Predikaattilogiikan puoliratkeavuus

- Päteviä lauseita vastaava kieli VALID $= \{\phi \mid \phi$ on lause ja $\models \phi\}$ on ainoastaan *hyväksyttävissä* deterministisellä Turing-koneella.
- Voidaan laatia *deterministinen* Turing-kone T seuraavasti:
  1. Jos $\varphi \in$ VALID, niin T pysähtyy hyväksyvään tilaan k.
  2. Jos $\varphi \notin$ VALID, niin T pysähtyy *joskus* hylkäävään tilaan e ja *joskus T ei pysähdy lainkaan*.
- Tällainen algoritmi voi perustua esim. semanttisiin tauluihin.
- Jos juurisolmuun $E\varphi$ perustuva taulu tehdään *systemaattisesti*, voidaan taata, että taulu tulee ristiriitaiseksi, mikäli $\models \varphi$.

Systemaattisen taulun periaatteita

- Tuotetaan indeksoimalla riittävä määrä uusia vakioita $c_1, c_2, c_3, \ldots$
- Tuotetaan tarpeen mukaan muuttujattomia termejä $t_1, t_2, t_3, \ldots$, jotka rakentuvat $E\varphi$:ssä esiintyvistä vakio- ja funktiosymboleista sekä mahdollisesti käyttöön otetuista uusista vakioista $c_1, c_2, c_3, \ldots$.
- Sekvenssin $t_1, t_2, t_3, \ldots$ on oltava *reilu*: jokainen em. symboleista rakentuva muuttujaton termi t esiintyy siinä jonain terminä t_i.
- *Hajotusten reiluus*: taataan, että taulun keskeneräisillä poluilla esiintyvät hajottamattomat solmut tulevat hajotusvuoroon (seuraavan kerran) äärellisen monen muun hajotuksen jälkeen.
- Universaalisia solmuja $T\,\forall x\psi(x)$ ja $E\,\exists x\psi(x)$ hajotetaan järjestyksessä käyttäen muuttujattomia termejä $t_1, t_2, t_3, \ldots$.

Universaaliset solmut

- Universaalisia solmuja ei välttämättä saada hajotetuksi äärellisellä askelmäärällä, jolloin valmis taulu muodostuu äärettömäksi.

Esimerkki Määritellään luonnollisten lukujen $>$-relaatio. Olkoon $G(x,y)$ = "$x > y$"ja $s(x)$ luvun x seuraaja (eli $x+1$):

$$\forall x\, G(s(x), x) \text{ ja } \forall x \forall y (G(x,y) \rightarrow G(s(x), y)).$$

Kysely: onko $G(s(s(s(0))), s(0))$ määritelmän looginen seuraus?

Hajotetaan systemaattisesti semanttisen taulun solmuja

$$T\,\forall x\, G(s(x), x) \text{ ja } T\,\forall x \forall y (G(x,y) \rightarrow G(s(x), y))$$

käyttäen muuttujattomia termejä: $0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \ldots$ ■

Systemaattinen taulu voi tehdä turhaa työtä $\Longrightarrow$ heuristiikka tarpeen!

5. VASTAMALLIEN MUODOSTAMINEN

- Vastamallin (struktuuri) $\mathcal{S}$ muodostetaan jonkin ristiriidattoman polun *atomisia lauseita* koskevia totuusarvovaatimuksia $T\,P(t_1, \ldots, t_n)$, $E\,Q(s_1, \ldots, s_m)$, ..., jne.
- Valitaan riittävän iso universumi U, jotta totuusarvovaatimuksissa esiintyville vakio- ja funktiosymboleille voidaan antaa tulkinnat.
- Valitaan predikaattien tulkinnat totuusarvovaatimusten mukaisesti:
  1. Jos $T\,P(t_1, \ldots, t_n)$ on polulla, $\langle t_1^{\mathcal{S}}, \ldots, t_n^{\mathcal{S}} \rangle \in P^{\mathcal{S}}$.
  2. Jos $E\,Q(s_1, \ldots, s_m)$ on polulla, $\langle s_1^{\mathcal{S}}, \ldots, s_m^{\mathcal{S}} \rangle \notin Q^{\mathcal{S}}$.
- Menettely on käyttökelpoinen erityisesti, jos *valmiin* semanttisen taulun ristiriidaton polku on *äärellinen*.

Esimerkki

Haetaan vastamalli $\mathcal{S}$ lauseen $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ pätevyydelle:

$$
\begin{array}{c}
1.\ E\,\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \\
| \\
2.\ E\,(P(c) \rightarrow Q(c))\ ^{1.\ x/c} \\
| \\
3.\ T\,(P(c))\ ^{2.} \\
| \\
4.\ E\,(Q(c))\ ^{2.}
\end{array}
$$

1. Polulta saatavat totuusarvovaatimukset: $T\,P(c)$ ja $E\,Q(c)$.
2. Riittää, että universumiin $U = \{1\}$ otetaan yksi alkio s.e. $c^{\mathcal{S}} = 1$.
3. Totuusarvovaatimusten nojalla: $1 \in P^{\mathcal{S}}$ ja $1 \notin Q^{\mathcal{S}}$.
4. Nämä vaatimukset toteutuvat valinnoilla $P^{\mathcal{S}} = \{1\}$ ja $Q^{\mathcal{S}} = \emptyset$.

TAVOITTEET

- Osaat muodostaa *valmiin* semanttisen taulun taulusääntöjä soveltamalla, kun juurisolmu(t) on annettu.
- Tunnet joitain periaatteita taulujen koon kasvun hillitsemiseksi.
- Tiedät, miten erilaiset loogiset päättelytehtävät ovat suoritettavissa semanttisten taulujen avulla.
- Mikäli valmiiseen semanttiseen tauluun jää ei-ristiriitaisia polkuja, osaat muodostaa vastamallin atomisia lauseita koskevien totuusarvovaatimusten pohjalta.

PÄIVÄN PÄHKINÄ

Tarkastellaan predikaattilogiikan kieltä $\mathcal{L}$, joka perustuu vakio- ja funktiosymbolien joukkoihin $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}$ ja $\mathcal{F} = \emptyset$.

Oletetaan lisäksi, ettei universumissa U ole muita kuin vakioiden $c_1, \ldots, c_n$ nimeämiä alkioita.

- Mieti, millä tapaa eksistentiaalisten ja universaalisten solmujen käsittelyä voidaan yksinkertaistaa näillä olettamuksilla.
- Onko näin syntyvä rajoitettu taulumenetelmä verrattavissa lauselogiikan semanttisten taulujen menetelmään?