Luento 6: Laskennallisesta vaativuudesta

1. Looginen päättely resoluutiolla (luennolta 5)
2. Laskennan malli
3. Keskeiset vaativuusluokat
4. Redusoituvuus ja vaikeat ongelmat

1. LOOGINEN PÄÄTTELY RESOLUUTIOLLA

Erilaisissa loogisissa tehtävissä tarvittavia klausuulimuotoja:

1. Muunnetaan lause $\phi \in \mathcal{L}$ konjunktiiviseen normaalimuotoon ja edelleen klausuulijoukoksi S_ϕ.
2. Muunnetaan lausejoukko $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ klausuulijoukoksi $S_\Sigma = \bigcup_{\phi \in \Sigma} S_\phi$.
3. Muunnetaan lauseen *negaatio* $\neg\phi$ klausuulijoukoksi $S_{\neg\phi}$.
4. Muunnetaan lausejoukko $\Sigma \cup \{\neg\phi\}$ klausuulijoukoksi $S_{\Sigma\cup\{\neg\phi\}}$.
5. Muunnetaan lausejoukko $\{\phi, \neg\psi\}$ klausuulijoukoksi $S_{\{\phi,\neg\psi\}}$.
6. Muunnetaan lausejoukko $\{\phi, \neg\psi\}$ klausuulijoukoksi $S_{\{\neg\phi,\psi\}}$.

Loogiset päätelmät resoluutiolla

- Lause ϕ on *toteutumaton* $\iff$ S_ϕ on toteutumaton.
- Lausejoukko Σ on *toteutumaton* $\iff$ S_Σ on toteutumaton.
- Lause ϕ on *pätevä* $\iff$ $S_{\neg\phi}$ on toteutumaton.
- Lause ϕ on *looginen seuraus* lausejoukosta Σ $\iff$ $S_{\Sigma\cup\{\neg\phi\}}$ on toteutumaton.
- Lauseet ϕ ja ψ ovat *loogisesti ekvivalentit* $\iff$ $S_{\{\phi,\neg\psi\}}$ ja $S_{\{\neg\phi,\psi\}}$ ovat toteutumattomia.

Sen sijaan (vasta)mallien hakeminen resoluutiolla on hankalaa!

Pätevyyden tutkiminen

Esimerkki 7.24 Tarkastellaan lausetta $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow C) \rightarrow B \vee C$.

Lauseen *negaation* KNM on $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge \neg B \wedge \neg C$, joten vastaava klausuulijoukko on $S = \{\{\neg A, B\}, \{A, C\}, \{\neg B\}, \{\neg C\}\}$.

Resoluutiotodistus:

1.	$\{\neg A, B\}$	S
2.	$\{A, C\}$	S
3.	$\{\neg B\}$	S
4.	$\{\neg C\}$	S
5.	$\{B, C\}$	1, 2
6.	$\{C\}$	3, 5
7.	$\square$	4, 6

$\Longrightarrow$ Lause on pätevä. ■

Pätevyyden tutkiminen

Esimerkki 7.25 Tutkitaan lausetta $(A \to B) \wedge (A \to C) \to B \vee C$.

Lauseen *negaation* KNM on $(\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge \neg B \wedge \neg C$.

Resoluutiotodistus:

1.	$\{\neg A, B\}$	S
2.	$\{\neg A, C\}$	S
3.	$\{\neg B\}$	S
4.	$\{\neg C\}$	S
5.	$\{\neg A\}$	1, 3

Muita klausuuleja (mukaan lukien $\Box$) ei ole enää johdettavissa.

$\Longrightarrow$ Lause ei ole pätevä.

Vastamalli $\mathcal{A} = \emptyset$ nähtävissä klausuuleista 3–5, kun $\mathcal{P} = \{A, B, C\}$ $\blacksquare$

Loogisen seuraavuuden tutkiminen

Esimerkki 7.27 Hissiesimerkin lauseille ja turvallisuusominaisuuden $\neg(A_1 \wedge A_2)$ *negaatiolle* saadaan kokonaisuutena klausuulijoukko

$$S = \{\{\neg K_1, \neg K_2\}, \{\neg A_1, K_1\}, \{\neg A_2, K_2\}, \{A_1\}, \{A_2\}\}.$$

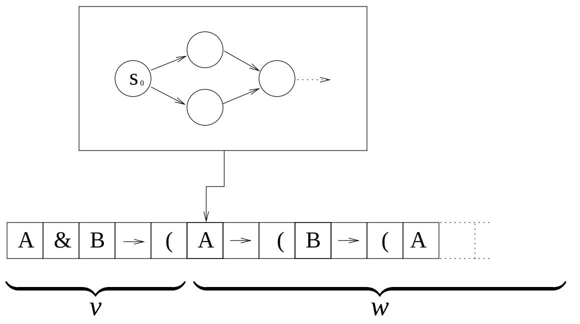
Joukon S hylkäyksestä muodostuu seuraava:

1.	$\{\neg K_1, \neg K_2\}$	S	6.	$\{K_1\}$	2, 4
2.	$\{\neg A_1, K_1\}$	S	7.	$\{K_2\}$	3, 5
3.	$\{\neg A_2, K_2\}$	S	8.	$\{\neg K_2\}$	1, 6
4.	$\{A_1\}$	S	9.	$\Box$	7, 8
5.	$\{A_2\}$	S			

$\Longrightarrow$ Lause $\neg(A_1 \wedge A_2)$ on muiden lauseiden looginen seuraus. $\blacksquare$

2. LASKENNAN MALLI

Määritelmä 8.1 Deterministinen Turing-kone T on nelikkö $\langle A, S, s_0, t\rangle$, missä A on *aakkosto*, S on *tilajoukko*, $s_0 \in S$ on *alkutila* ja $t : S \times A \to S \times A \times \{\to, \leftarrow, \downarrow\}$ on *tilansiirtofunktio*.



Konfiguraatiot ja laskennat

- Turing-koneen T kokonaistilan määrää *konfiguraatio* $\langle s, v, w\rangle$, missä $s \in S$ on koneen T tila sekä $v \in A^*$ ja $w \in A^+$ ovat merkkijonoja.
- Työnauhan sisältö on kokonaisuudessaan vw ja T käsittelee aina merkkijonon w ensimmäistä merkkiä (luku-kirjoituspään kohta).
- Tilasiirtymä $\langle s, v, w\rangle \xrightarrow{T} \langle s', v', w'\rangle$ riippuu tilansiirtofunktion arvosta $t(s, a) = \langle s', a', m\rangle$, missä a on w:n ensimmäinen merkki.

Määritelmä 8.2 Turing-koneen T suorittama n askeleen mittainen *laskenta* syötteellä w_0 on konfiguraatioiden jono

$$\langle s_0, v_0, w_0\rangle \xrightarrow{T} \langle s_1, v_1, w_1\rangle \xrightarrow{T} \ldots \xrightarrow{T} \langle s_n, v_n, w_n\rangle,$$

missä $v_0 = \varepsilon$ ja s_n on yksi tilajoukon S *erikoistiloista* k, e tai p.

Hyväksyvä laskenta

- Deterministinen Turing-kone T *hyväksyy* syötteensä w_0, joss $s_n = \mathsf{k}$ koneen T suorittamalle laskennalle $\langle s_0, \varepsilon, w_0\rangle \xrightarrow{T} \ldots \xrightarrow{T} \langle s_n, v_n, w_n\rangle$.

Esimerkki 8.3 Olkoon $A = \{0, 1, \sqcup\}$ ja $S = \{s_0, s_1, \mathsf{k}, \mathsf{e}, \mathsf{p}\}$. Binääriluvun pariteetti voidaan tarkastaa seuraavalla Turing-koneella T_{par}:

S	A	$S \times A \times \{\rightarrow, \leftarrow, \downarrow\}$
s_0	0	$\langle s_0, 0, \rightarrow\rangle$
s_0	1	$\langle s_1, 1, \rightarrow\rangle$
s_0	$\sqcup$	$\langle \mathsf{k}, \sqcup, \downarrow\rangle$

S	A	$S \times A \times \{\rightarrow, \leftarrow, \downarrow\}$
s_1	0	$\langle s_1, 0, \rightarrow\rangle$
s_1	1	$\langle s_0, 1, \rightarrow\rangle$
s_1	$\sqcup$	$\langle \mathsf{e}, \sqcup, \downarrow\rangle$

Syötteellä "101" kone T_{par} laskee seuraavasti: $\langle s_0, \varepsilon, 101\rangle \xrightarrow{T_{\text{par}}} \langle s_1, 1, 01\rangle \xrightarrow{T_{\text{par}}} \langle s_1, 10, 1\rangle \xrightarrow{T_{\text{par}}} \langle s_0, 101, \sqcup\rangle \xrightarrow{T_{\text{par}}} \langle \mathsf{k}, 101, \sqcup\rangle$. ■

Epädeterministiset Turing-koneet

- Tilansiirtofunktio t korvataan tilansiirtorelaatiolla $t : S \times A \rightarrow \mathbf{2}^{S \times A \times \{\rightarrow, \leftarrow, \downarrow\}}$.
- Tilasiirtymä konfiguraatiossa $\langle s, v, aw\rangle$ perustuu epädeterministisesti valittuun kolmikkoon $\langle s', a', m\rangle \in t(s, a)$.
- Mahdollisia laskentoja voi olla useita.

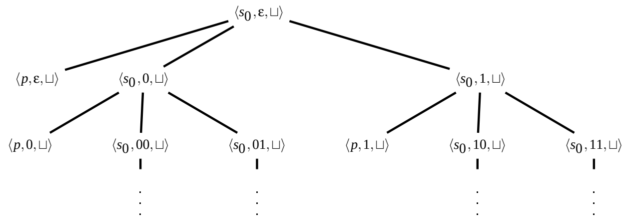
Esimerkki 8.4 Olkoon $A = \{0, 1, \sqcup\}$ ja $S = \{s_0, k, e, p\}$. Määritellään epädeterministinen Turing-kone seuraavasti:

S	A	$\mathbf{2}^{S \times A \times \{\rightarrow, \leftarrow, \downarrow\}}$
s_0	$\sqcup$	$\{\langle s_0, 0, \rightarrow\rangle, \langle s_0, 1, \rightarrow\rangle, \langle \mathsf{p}, \sqcup, \downarrow\rangle\}$

Yksi mahdollinen laskenta: $\langle s_0, \varepsilon, \sqcup\rangle \xrightarrow{T} \langle s_0, 1, \sqcup\rangle \xrightarrow{T} \langle s_0, 10, \sqcup\rangle \xrightarrow{T} \langle s_0, 101, \sqcup\rangle \xrightarrow{T} \langle \mathsf{p}, 101, \sqcup\rangle$. ■

Epädeterministisen laskennan piirteitä

- Vaihtoehtoisista laskennoista muodostuu *laskentapuu*:



- Deterministisen koneen laskentapuussa on vain yksi haara!

Määritelmä 8.7 (Epädeterministinen) Turing-kone $T = \langle A, S, s_0, t\rangle$ *hyväksyy* kielen $L \subseteq (A \setminus \{\sqcup\})^*$, jos ja vain jos kaikille $x \in (A \setminus \{\sqcup\})^*$, $x \in L \iff$ koneella T on ainakin yksi hyväksyvä laskenta syötteellä x.

Päätösongelmien ratkaiseminen

- *Päätösongelmat* ovat ongelmia, joiden instanssien ratkaisuksi riittää yksinkertainen vastaus "kyllä" tai "ei".
- Päätösongelman ratkaiseminen Turing-koneella edellyttää ongelmatapausten esittämistä merkkijonoina ja Turing-koneen T laatimista "kyllä"-tapauksia vastaavan kielen hyväksymiseen.

Esimerkki Onko 561 alkuluku?

Esimerkki 8.8 Lauselogiikan toteutuvuusongelmassa on tarkoituksena selvittää, onko syötteeksi annettu lause $\phi \in \mathcal{L}$ toteutuva vai ei. ■

$\Longrightarrow$ Lauselogiikan toteutuvuusongelma voidaan samaistaa toteutuvien lauseiden joukkoa vastaavaan kieleen $\mathrm{SAT} = \{\phi \mid \exists \mathcal{A} \subseteq \mathrm{At}(\phi) : \mathcal{A} \models \phi\}$.

3. KESKEISET VAATIVUUSLUOKAT

➤ Päätösongelmien laskennallista vaativuutta voidaan analysoida asettamalla Turing-koneiden laskentaresursseille rajoituksia.

Määritelmä 8.9 Turing-kone $T = \langle A, S, s_0, t \rangle$ pysähtyy *polynomisessa ajassa* syötteen pituuden nähden, joss on olemassa aidosti kasvava polynomi p siten, että kaikille merkkijonoille $x \in (A \setminus \{\sqcup\})^*$, koneen T laskenta syötteellä x käsittää korkeintaan $p(|x|)$ konfiguraatiota.

Kaksi keskeistä kielten (ja päätösongelmien) luokkaa ovat:

1. Luokka $\mathbf{P}$ eli kielet, jotka voidaan hyväksyä polynomisessa ajassa *deterministisellä* Turing-koneella.
2. Luokka $\mathbf{NP}$ eli kielet, jotka voidaan hyväksyä polynomisessa ajassa *epädeterministisellä* Turing-koneella.

Päätösongelman SAT alustava luokittelu

Teoreema 8.10 Toteutuvuusongelma SAT kuuluu luokkaan $\mathbf{NP}$.

Todistuksen idea: Voidaan laatia epädeterministinen Turing-kone T_{sat}, jolle annetaan syötteeksi lauselogiikan lause $\phi \in \mathcal{L}$ ja joka

1. valitsee epädeterministisesti totuusjakelun $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{At}(\phi)$,
2. laskee lauseen ϕ totuusarvon totuusjakelussa $\mathcal{A}$ ja
3. pysähtyy tilaan k, jos $\mathcal{A} \models \phi$, ja muutoin tilaan e.

Tarvittava laskenta pystytään suorittamaan polynomisessa ajassa lauseen ϕ merkkijonoesityksen pituuden suhteen.

Voidaan osoittaa, että $\phi \in \text{SAT}$, jos ja vain jos koneella T_{sat} on ainakin yksi hyväksyvä laskenta syötteellä ϕ. □

4. REDUSOITUVUUS JA VAIKEAT ONGELMAT

Määritelmä 8.11 Kieli $L_1 \subseteq (A_1 \setminus \{\sqcup\})^*$ on *redusoitavissa* kieleen $L_2 \subseteq (A_2 \setminus \{\sqcup\})^*$, jos ja vain jos löytyy syötteen $w \in (A_1 \setminus \{\sqcup\})^*$ pituuden suhteen polynomisessa ajassa deterministisellä Turing-koneella laskettava funktio $r : (A_1 \setminus \{\sqcup\})^* \to (A_2 \setminus \{\sqcup\})^*$ siten, että $w \in L_1 \iff r(w) \in L_2$.

Esimerkki 8.12 Olkoon $G = \langle S, K \rangle$ graafi, missä $K \subseteq S \times S$ antaa solmujen väliset kaaret. Kysymys graafin G kolmiväritettävyydestä, eli päätösongelma 3COL, voidaan *redusoida* lauselogiikan toteutuvuuskysymykseksi seuraavasti. Määritellään $r(G) = r(\langle S, K \rangle) =$

$$\{M_s \vee V_s \vee H_s \mid s \in S\} \cup \{\neg M_s \vee \neg M_t,\ \neg V_s \vee \neg V_t,\ \neg H_s \vee \neg H_t \mid \langle s,t \rangle \in K\}.$$

Nyt voidaan osoittaa, että $G \in \text{3COL} \iff r(G) \in \text{SAT}$. ■

Vaikeat ja täydelliset ongelmat

Määritelmä 8.13 Olkoon $\mathbf{C}$ jokin kielten luokka. Kieli L on

1. $\mathbf{C}$-*vaikea*, jos ja vain jos jokainen luokan $\mathbf{C}$ kieli L' voidaan redusoida kieleen L polynomisessa ajassa ja
2. $\mathbf{C}$-*täydellinen*, jos ja vain jos L kuuluu luokkaan $\mathbf{C}$ ja L on $\mathbf{C}$-vaikea.

Teoreema 8.14 Toteutuvuusongelma SAT on $\mathbf{NP}$-vaikea.

Muutama keskeinen huomio:

➤ $\mathbf{C}$-täydelliset ongelmat ovat vaativimpia luokan $\mathbf{C}$ ongelmia.

➤ SAT on $\mathbf{NP}$-täydellinen ongelma.

DPLL-algoritmi

Olkoon S äärellinen klausuulijoukko ja L joukko literaaleja.

Function OnToteutuva(S, L): **Boolean**;
Begin
  $\langle S,L \rangle$:= Yksinkertaista(S, L);
  If $\Box \in S$ **Then Return False**;
  If $S = \emptyset$ **Then Return True**;
  l := Valitse(S, L);
  If OnToteutuva(S, $L \cup \{l\}$) **Then Return True**
  Else Return OnToteutuva(S, $L \cup \{\bar{l}\}$);
End

Tehokkaita DPLL-toteutuksia ja benchmark-ongelmia on saatavilla verkossa (kts. esim. `http://www.satlive.org`).

TAVOITTEET

- Olet kerrannut Turing-koneisiin liittyvät keskeiset määritelmät.
- Osaat määritellä luokat $\mathbf{P}$ ja $\mathbf{NP}$ ja selittää niiden välisen eron määritelmällisestä näkökulmasta ($\mathbf{P} \overset{?}{=} \mathbf{NP}$ on avoin kysymys).
- Tiedät, mitä päätösongelman $\mathbf{NP}$-täydellisyys tarkoittaa ja mitä $\mathbf{NP}$-täydellisyyden osoittaminen vaatii.
- Ymmärrät reduktioiden roolin päätösongelmien välisinä muunnoksia ja tunnet tällaisista muunnoksista joitain esimerkkejä.
- Osaat simuloida DPLL-algoritmia annetulle klausuulijoukolle.
- Olet kokeillut jotain toteutuvuustarkistinta käytännössä.

PÄIVÄN PÄHKINÄ

Esimerkin 8.15 DPLL-simulaatiossa oletettiin literaalit P_1 ja V_1, jolloin voitiin päätellä kartanväritysesimerkin klausuulijoukosta S literaalit

$$P_1,\ \neg V_1,\ \neg S_1,\ \neg P_2,\ \neg P_3,\ \neg P_4,\ V_2,\ \neg S_2,\ \neg V_3,\ \neg V_4,\ S_3,\ S_4,$$

jolloin päädyttiin ristiriitaan.

- Osoita, että $S \models \neg P_1 \vee \neg V_2$.
- Mieti kytkentöjä DPLL-algoritmin suorituksen aikana syntyvän laskentapuun ja resoluutiomenetelmän täydellisyystodistuksen yhteydessä käytetyn puurakenteen välillä.
- Voidaanko DPLL-algoritmin suorittamaa laskentaa hyödyntää klausuulin $\neg P_1 \vee \neg V_1$ johtamiseen joukosta S?