Luento 5: Normaalimuodot ja resoluutio

1. Lauselogiikan normaalimuodot
2. Muunnokset normaalimuotoihin
3. Normaalimuotojen sieventäminen
4. Lauseiden klausuulimuoto
5. Resoluutiotodistukset
6. Virheettömyys ja täydellisyys

1. LAUSELOGIIKAN NORMAALIMUODOT

- Jos A on atominen lause, niin A ja $\neg A$ ovat *literaaleja*.
- *Positiivisen* literaalin A *komplementti* $\overline{A} = \neg A$ ja *negatiivisen* literaalin $\neg A$ *komplementti* $\overline{\neg A} = A$.

Määritelmä 6.2 (Normaalimuotojen rakenne)
Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ on *konjunktiivisessa* normaalimuodossa, jos ja vain jos α on muodoltaan konjunktio $\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \cdots \wedge \beta_n$, missä jokainen konjunkti β_i on literaaleista $l_1, l_2, \ldots, l_{m_i}$ koostuva disjunktio $l_1 \vee l_2 \vee \cdots \vee l_{m_i}$.

Lause $\alpha \in \mathcal{L}$ on *disjunktiivisessa* normaalimuodossa, jos ja vain jos α on muodoltaan disjunktio $\beta_1 \vee \beta_2 \vee \cdots \vee \beta_n$, missä jokainen disjunkti β_i on literaaleista $l_1, l_2, \ldots, l_{m_i}$ koostuva konjunktio $l_1 \wedge l_2 \wedge \cdots \wedge l_{m_i}$.

Normaalimuodot

Esimerkki 6.3 Tarkastellaan seuraavia lauseita:

KNM:	$(A_1 \vee \neg A_2) \wedge (\neg A_1 \vee \neg A_3) \wedge (A_5 \vee A_6 \vee A_7)$
KNM & DNM:	$A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3$
DNM:	$(\neg A_1 \wedge \neg A_2) \vee (A_3 \wedge A_1) \vee (A_1 \wedge \neg A_2 \wedge A_3)$

Määritelmä 6.4 Lause $\beta \in \mathcal{L}$ on lauseen $\alpha \in \mathcal{L}$ konjunktiivinen (disjunktiivinen) normaalimuoto, jos ja vain jos β on konjunktiivisessa (disjunktiivisessa) normaalimuodossa ja $\beta \equiv \alpha$.

Esimerkki 6.5 Lause $A \vee (\neg B \wedge C)$ on loogisesti ekvivalentti konjunktiivisen normaalimuodon $(A \vee \neg B) \wedge (A \vee C)$ kanssa.

Väite 6.7 Jokaiselle lauselogiikan lauseelle on olemassa KNM ja DNM.

2. MUUNNOKSET NORMAALIMUOTOIHIN

Lauseen disjunktiivinen/konjunktiivinen normaalimuoto voidaan hakea erityisten muunnossääntöjen avulla seuraavien vaiheiden mukaisesti:

1. Poistetaan ekvivalenssit ($\leftrightarrow$).
2. Poistetaan implikaatiot ($\rightarrow$).
3. Siirretään negaatiot välittömästi atomisten lauseiden eteen.
4. Järjestetään konjunktiot disjuktioiden ulkopuolelle (KNM) tai disjunktiot konjunktioiden ulkopuolelle (DNM).

Huomio Seuraavaksi esitettävät muunnossäännöt säilyttävät loogisen ekvivalenssin, joten lopputuloksena saadaan lauseelle konjunktiivinen tai disjunktiivinen normaalimuoto.

Muunnossäännöt

$\alpha \leftrightarrow \beta$	$\rightsquigarrow$	$(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$	(6.1)
$\alpha \leftrightarrow \beta$	$\rightsquigarrow$	$(\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\neg\beta \vee \alpha)$	(6.2)
$\alpha \rightarrow \beta$	$\rightsquigarrow$	$\neg\alpha \vee \beta$	(6.3)
$\neg(\alpha \vee \beta)$	$\rightsquigarrow$	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	(6.4)
$\neg(\alpha \wedge \beta)$	$\rightsquigarrow$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	(6.5)
$\neg\neg\alpha$	$\rightsquigarrow$	α	(6.6)
$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$	$\rightsquigarrow$	$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$	(6.7)
$(\alpha \wedge \beta) \vee \gamma$	$\rightsquigarrow$	$(\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma)$	(6.8)
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$	$\rightsquigarrow$	$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$	(6.9)
$(\alpha \vee \beta) \wedge \gamma$	$\rightsquigarrow$	$(\alpha \wedge \gamma) \vee (\beta \wedge \gamma)$	(6.10)

Esimerkki

Haetaan lauseen $A \vee B \rightarrow (B \leftrightarrow C)$ normaalimuodot.

$\rightsquigarrow \quad A \vee B \rightarrow (B \rightarrow C) \wedge (C \rightarrow B)$ (6.1)

$\rightsquigarrow \quad \neg(A \vee B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))$ (6.3)

$\rightsquigarrow \quad (\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))$ (6.4)

$\rightsquigarrow \quad (\neg A \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B))) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)))$

$\rightsquigarrow \quad (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee ((\neg B \vee C) \wedge (\neg C \vee B)))$

$\rightsquigarrow \quad (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee B) \wedge (\neg B \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee \neg C \vee B).$

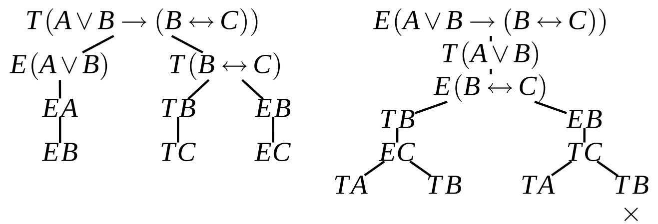
$\rightsquigarrow \quad (\neg A \wedge \neg B) \vee ((\neg B \vee C) \wedge \neg C) \vee ((\neg B \vee C) \wedge B)$ (6.9)

$\rightsquigarrow \quad (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg C) \vee ((\neg B \vee C) \wedge B)$ (6.10)

$\rightsquigarrow \quad (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg B \wedge \neg C) \vee (C \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge B) \vee (C \wedge B).$ (6.10)

Normaalimuotojen hakeminen taulumenetelmällä

- Lauseen α DNM saadaan juurisolmusta $T\alpha$ muodostetun valmiin semanttisen taulun ristiriidattomista poluista.
- Lauseen α KNM saadaan lauseen $\neg\alpha$ disjunktiivisesta normaalimuodosta De Morganin sääntöjen avulla.



$\alpha \equiv (\neg A \wedge \neg B) \vee (B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C)$

$\alpha \equiv \neg\neg\alpha \equiv (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)$

3. NORMAALIMUOTOJEN SIEVENTÄMINEN

Normaalimuotoja voidaan sieventää mm. seuraavilla periaatteilla:

1. Poistetaan literaalien disjunktioista/konjunktioista literaalien moninkertaiset esiintymät (literaalit mainitaan vain kertaalleen).
2. Poistetaan literaalien disjunktiot/konjunktiot, joissa esiintyy jokin literaali l ja sen komplementti $\bar{l}$ ja jotka ovat siten tosia/epätosia.
3. Jos *konjunktiivisessa* normaalimuodossa esiintyy disjunktiot $l_1 \vee \ldots \vee l_n$ ja $k_1 \vee \ldots \vee k_m$, joille $\{l_1, \ldots, l_n\} \subseteq \{k_1, \ldots, k_m\}$, poistetaan jälkimmäinen.
4. Jos *konjunktiivisessa* normaalimuodossa esiintyy yksiliteraalinen disjunktio l, poistetaan muut disjunktiot, joissa l esiintyy, sekä komplementtiliteraalin $\bar{l}$ esiintymät muista disjunktioista.

4. LAUSEIDEN KLAUSUULIMUOTO

- Literaalien $l_1,\ldots,l_n$ disjunktio $l_1 \vee \cdots \vee l_n$ on *klausuuli*.
- Klausuulit esitetään usein literaalien *joukkoina* $\{l_1,\ldots,l_n\}$, jolloin tyhjä klausuuli $\emptyset$ (merkintä $\square$) vastaa tyhjää disjunktiota $\bot$.
- Joukko klausuuleita S edustaa klausuuliensa konjunktiota.
- Tyhjä klausuulijoukko $\emptyset$ edustaa tyhjää konjunktiota $\top$.
- Mistä tahansa konjunktiivisessa normaalimuodossa olevasta lauseesta ϕ voidaan muodostaa klausuulijoukko S_ϕ.

Esimerkki 7.2 Konjunktiivista normaalimuotoa $(A \vee \neg B) \wedge (\neg C \vee \neg A \vee D)$ vastaava klausuulijoukko on $\{\{A,\neg B\},\{\neg A,\neg C,D\}\}$.

Totuusmääritelmä ja toteutuvuus klausuuleille

Totuusjakelun $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ *literaaliesitys* on $\mathrm{Lit}(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \cup \{\neg A \mid A \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{A}\}$.

Määritelmä 7.3 Olkoon $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ mikä tahansa totuusjakelu.

1. Klausuulille C: $\mathcal{A} \models C$, jos ja vain jos $C \cap \mathrm{Lit}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.
2. Klausuulijoukolle S: $\mathcal{A} \models S$, jos ja vain jos $\mathcal{A} \models C$ kaikille $C \in S$.
3. Totuusjakelu $\mathcal{A}$ on klausuulijoukon S *malli*, jos ja vain jos $\mathcal{A} \models S$.

- Klausuulijoukko S on *toteutuva*, jos ja vain jos joukolla S on ainakin yksi malli $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.
- Muussa tapauksessa S on *toteutumaton*.

5. RESOLUUTIOTODISTUKSET

Määritelmä 7.9 Olkoot $C_1 = \{l, l_1,\ldots,l_n\}$ ja $C_2 = \{\bar{l}, l'_1,\ldots,l'_m\}$ kaksi klausuulia. Klausuuli

$$C = (C_1 \cup C_2) \setminus \{l,\bar{l}\} = \{l_1,\ldots,l_n,l'_1,\ldots,l'_m\}$$

on klausuulien C_1 ja C_2 *yhdistelmä*.

Esimerkki 7.10 Sovelletaan resoluutiosääntöä seuraaviin klausuuleihin:

$$\begin{array}{ccc} \{A,B,\neg C\} & & \{\neg A,D,\neg C\} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \{B,\neg C,D\} & \end{array}$$

Sääntöä sovellettiin yllä literaalien A ja $\neg A$ suhteen. Joukkoesityksessä $\neg C$ esiintyy yhdistelmässä $\{B,\neg C,D\}$ vain kertaalleen. ■

Resoluutiotodistukset

Lähtökohtana klausuulijoukko S johon sovelletaan resoluutiosääntöä.

Määritelmä 7.12 Klausuulin C *johto* joukosta S on äärellinen jono klausuuleja $C_1,\ldots,C_n$, missä $C_n = C$ ja jokaiselle klausuulille C_i joko

1. $C_i \in S$ tai
2. C_i on joidenkin sitä edeltävien klausuulien C_j ja C_k yhdistelmä.

Määritelmä 7.13 Jos klausuulijoukosta S voidaan johtaa tyhjä klausuuli $\square$, kyseistä johtoa kutsutaan joukon S *hylkäykseksi*.

- Hylkääminen tarkoittaa nimenomaan joukon S hylkäämistä toteutuvana klausuulijoukkona.
- Resoluutiotodistukselle voidaan muodostaa myös puuesitys.

Esimerkki hylkäyksestä

Esimerkki 7.15 Klausuulijoukolle

$$S = \{\{A,B,\neg C,\neg D\},\{\neg A,E\},\{\neg B,\neg F\},\{C,E\},\{D,\neg F\},\{\neg E\},\{F\}\}$$

saadaan seuraavanlainen hylkäys:

1.	$\{A,B,\neg C,\neg D\}$	S	8.	$\{D,\neg F\}$	S
2.	$\{\neg A,E\}$	S	9.	$\{E,\neg F\}$	7, 8
3.	$\{E,B,\neg C,\neg D\}$	1, 2	10.	$\{\neg E\}$	S
4.	$\{\neg B,\neg F\}$	S	11.	$\{\neg F\}$	9, 10
5.	$\{E,\neg F,\neg C,\neg D\}$	3, 4	12.	$\{F\}$	S
6.	$\{C,E\}$	S	13.	$\Box$	11, 12
7.	$\{E,\neg F,\neg D\}$	5, 6			■

6. VIRHEETTÖMYYS JA TÄYDELLISYYS

Väite 7.16 Jos totuusjakelu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on klausuulijoukon S malli ja C on kahden klausuulin $C_1 \in S$ ja $C_2 \in S$ yhdistelmä, niin $\mathcal{A} \models S \cup \{C\}$.

Teoreema 7.17 Jos joukolle S on hylkäys, niin S on toteutumaton.

Todistus. Oletetaan, että klausuulijoukolle S on hylkäys $C_1,\ldots,C_n$, missä $C_n = \Box$. Tehdään vastaoletus, että S on toteutuva. Osoitetaan induktiolla i:n suhteen, että $S \cup \{C_1,\ldots,C_i\}$ on toteutuva, ristiriita.

Perustapaus $i = 0$: Joukko S on toteutuva (vastaoletus).

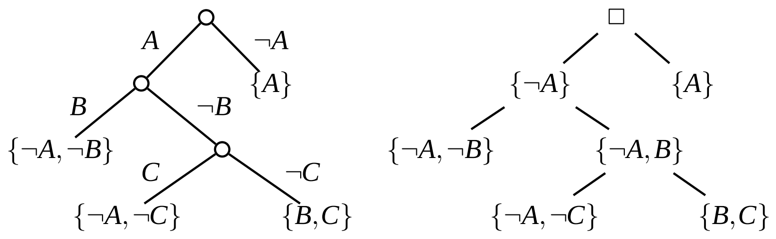
Induktioaskel: $S \cup \{C_1,\ldots,C_{i-1}\}$ on toteutuva (induktio-oletus).

1. Jos $C_i \in S$, joukko $S \cup \{C_1,\ldots,C_i\}$ on triviaalisti toteutuva.
2. Muutoin C_i on saatu resoluutiosäännöllä joukon $\{C_1,\ldots,C_{i-1}\}$ klausuuleista, joten $S \cup \{C_1,\ldots,C_i\}$ on toteutuva (väite 7.16). $\Box$

Puukonstruktio täydellisyystodistusta varten

Laaditaan tapausanalyysiä kuvaava binääripuu klausuulijoukolle

$$S = \{\{A\},\{B,C\},\{\neg A,\neg B\},\{\neg A,\neg C\}\}:$$



Huomio Kuhunkin lehtisolmuun s merkitty klausuuli C on epätosi totuusjakeluissa $\mathcal{A}$, joille polulla olevien literaalien joukko $L_s \subseteq \mathrm{Lit}(\mathcal{A})$.

Resoluution täydellisyystodistus

Väite 7.20 Jos klausuulijoukko S on toteutumaton, niin määritelmän 7.18 mukaisen binääripuun jokainen polku päättyy solmuun s, johon on merkitty jokin klausuuli $C \in S$ siten, että $\overline{C} \subseteq L_s$.

Teoreema 7.21 Jos joukko S on toteutumaton, sille on hylkäys.

Todistus. Olkoon S toteutumaton, jolloin binääripuun lehtisolmuina on S:n klausuulit. Käydään läpi sisäsolmut s (käänteisessä järjestyksessä).

Merkitään solmuun s klausuuliksi lapsisolmuihin merkittyjen klausuulien C_v ja C_o yhdistelmä C, jolle pätee $\overline{C} \subseteq L_s$ ($\overline{C_v} \subseteq L_{s_v}$ ja $\overline{C_o} \subseteq L_{s_o}$). Tämä ominaisuus siirtyy kaikille sisäsolmujen s klausuuleille.

Juurisolmun s tapauksessa $L_s = \emptyset$, joten $\overline{C} = \emptyset$ ja $C = \Box$.

TAVOITTEET

- Osaat hakea sekä konjunktiivisen että disjunktiivisen normaalimuodon mille tahansa lauselogiikan lauseelle.
- Osaat muodostaa konjunktiivisesta normaalimuodosta lauseen klausuuliesityksen ja laskea sen totuusarvon eri totuusjakeluissa.
- Tunnet resoluutiosäännön ja osaat johtaa sen avulla uusia klausuuleja annetusta klausuulijoukosta.
- Tiedät, että resoluutio (hylkäyksen olemassaolo) antaa virheettömän ja täydellisen menettelyn klausuulijoukon toteutumattomuuden tutkimiseen.

PÄIVÄN PÄHKINÄ

Tarkastele resoluution täydellisyystodistuksen yhteydessä laadittua binääripuuta esim. klausuulijoukolle

$$\{ \{A,B,C\},\{A,\neg B,C\},\{\neg A,B,C\},\{\neg A,\neg B,C\},$$
$$\{A,B,\neg C\},\{A,\neg B,\neg C\},\{\neg A,B,\neg C\},\{\neg A,\neg B,\neg C\} \}.$$

- Mieti miten resoluutioaskelien tekeminen joukon S klausuuleille vaikuttaa kyseisen puun kokoon (klausuulit lisätään joukkoon S)?
- Onko atomien käsittelyjärjestyksellä vaikutusta joukon S tapauksessa ja yleisesti ottaen?