# Luento 2: Semanttiset peruskäsitteet

**Sisältö**

1. Mallit ja toteutuvuus
2. Pätevyys ja vastamallit
3. Looginen seuraavuus
4. Looginen ekvivalenssi
5. Peruskäsitteiden väliset yhteydet
6. Tietämyksen esittämisestä





## 1. MALLIT JA TOTEUTUVUUS

**Määritelmä 3.1** Totuusjakelu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on lauseen $\phi \in \mathcal{L}$ *malli*, jos ja vain jos $\mathcal{A} \models \phi$ (eli lause $\phi$ on tosi totuusjakelussa $\mathcal{A}$).

**Esimerkki 3.2** Totuusjakelut $\mathcal{A}_1 = \{A\}, \mathcal{A}_2 = \{B\}$ ja $\mathcal{A}_3 = \{A, B\}$ ovat malleja lauseelle $A \lor B$, mutta $\mathcal{A}_4 = \emptyset$ ei ole. ■

**Määritelmä 3.3** Totuusjakelu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on lausejoukon $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ *malli* (merkitään $\mathcal{A} \models \Sigma$), jos ja vain jos $\mathcal{A} \models \phi$ kaikille lauseille $\phi \in \Sigma$.

Lausejoukon $\Sigma$ mallien joukko $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P} \mid \mathcal{A} \models \Sigma\}$.

- Olkoon $\mathrm{At}(\phi)$ lauseen $\phi$ atomisten lauseiden joukko.
- Selvitettäessä lauseen $\phi \in \mathcal{L}$ malleja voidaan rajoittua totuusjakeluihin $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{At}(\phi) \subseteq \mathcal{P}$.
- Vastaavasti lausejoukolle $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$, $\mathrm{At}(\Sigma) = \bigcup_{\phi \in \Sigma} \mathrm{At}(\phi)$.





## Esimerkki

**Esimerkki 3.4** Olkoon $\mathcal{P} = \{P, L, K\}$. Laaditaan lamppuesimerkin lausejoukolle $\Sigma = \{\neg P \to \neg L, P \to (L \leftrightarrow K)\} \subseteq \mathcal{L}$ totuustaulukko:

| $P$ | $L$ | $K$ | $\neg P$ | $\neg L$ | $\neg P \to \neg L$ | $L \leftrightarrow K$ | $P \to (L \leftrightarrow K)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $E$ | $E$ | $\boxed{T}$ | $T$ | $\boxed{T}$ |
| $T$ | $T$ | $E$ | $E$ | $E$ | $T$ | $E$ | $E$ |
| $T$ | $E$ | $T$ | $E$ | $T$ | $T$ | $E$ | $E$ |
| $T$ | $E$ | $E$ | $E$ | $T$ | $\boxed{T}$ | $T$ | $\boxed{T}$ |
| $E$ | $T$ | $T$ | $T$ | $E$ | $E$ | $T$ | $T$ |
| $E$ | $T$ | $E$ | $T$ | $E$ | $E$ | $E$ | $T$ |
| $E$ | $E$ | $T$ | $T$ | $T$ | $\boxed{T}$ | $E$ | $\boxed{T}$ |
| $E$ | $E$ | $E$ | $T$ | $T$ | $\boxed{T}$ | $T$ | $\boxed{T}$ |

$\Longrightarrow$ Malleja ovat $\mathcal{A}_1 = \{P, L, K\}$, $\mathcal{A}_2 = \{P\}$, $\mathcal{A}_3 = \{K\}$ ja $\mathcal{A}_4 = \emptyset$. ■





## Toteutuvuus

**Määritelmä 3.5** Lause $\phi \in \mathcal{L}$ (tai lausejoukko $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$) on *toteutuva*, jos ja vain jos ainakin yksi totuusjakelu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ on sen malli.

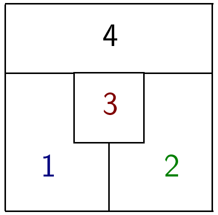
- *Toteutumattomalla* lauseella/lausejoukolla ei ole yhtään mallia.
- Toteutuvuutta voidaan tutkia lauseelle $\phi \in \mathcal{L}$ (vaihtoehtoisesti lausejoukolle $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$) laaditusta totuustaulukosta.

**Esimerkki 3.7** Lausejoukolle $\Sigma = \{A \lor B, A \lor \neg B, \neg A \lor B, \neg A \lor \neg B\}$:

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \lor B$ | $A \lor \neg B$ | $\neg A \lor B$ | $\neg A \lor \neg B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $E$ | $E$ | $\boxed{T}$ | $\boxed{T}$ | $\boxed{T}$ | $E$ |
| $T$ | $E$ | $E$ | $T$ | $\boxed{T}$ | $\boxed{T}$ | $E$ | $\boxed{T}$ |
| $E$ | $T$ | $T$ | $E$ | $\boxed{T}$ | $E$ | $\boxed{T}$ | $\boxed{T}$ |
| $E$ | $E$ | $T$ | $T$ | $E$ | $\boxed{T}$ | $\boxed{T}$ | $\boxed{T}$ |

## Rajoiteohjelmointi

**Esimerkki 3.8** Tarkastellaan oheisen kuvan mukaisen kartan värittämistä kolmella eri värillä siten, että vierekkäisillä alueilla on eri värit. Oheiset lauseet kuvaavat *kolmiväritystä* vastaavat rajoitteet:




Jokaiselle alueelle $i$ värin valitsevat lauseet:

$P_i \lor V_i \lor S_i$,

$\neg(P_i \land V_i)$, $\neg(V_i \land S_i)$ ja $\neg(S_i \land P_i)$.

Jokaiselle alueparille $\langle i, j\rangle$ $(i < j)$ rajoitteet:

$\neg(P_i \land P_j)$, $\neg(V_i \land V_j)$ ja $\neg(S_i \land S_j)$.

Totuusarvojakeluja (mallikandidaatteja) on yhteensä $2^{12} = 4096$ kpl!

Lausejoukko on toteutumaton $\Longrightarrow$ *kolmiväritys on mahdoton*. ■





## 2. PÄTEVYYS JA VASTAMALLIT

**Määritelmä 3.9** Lause $\phi \in \mathcal{L}$ on *pätevä* (merkitään $\models \phi$), jos $\mathcal{A} \models \phi$ kaikille totuusjakeluille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.

**Esimerkki** Olkoon $\mathcal{P} = \{A\}$ ja $\mathcal{L}$ vastaava kieli. Lause $A \lor \neg A \in \mathcal{L}$ on pätevä, koska $A \lor \neg A$ on tosi totuusjakeluissa $\mathcal{A}_1 = \emptyset$ ja $\mathcal{A}_2 = \{A\}$. ■

**Vastamallit**: Tarkastellaan mielivaltaista lausetta $\phi \in \mathcal{L}$:

- Jos $\models \phi$, niin $\mathcal{A} \models \phi$ kaikille totuusjakeluille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$.
- Muutoin $\not\models \phi$ eli löytyy totuusjakelu $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ siten, että $\mathcal{A} \not\models \phi$.

Jälkimmäisessä tapauksessa kutsumme totuusjakelua $\mathcal{A}$ *vastamalliksi* (tai vastaesimerkiksi) lauseen $\phi$ pätevyydelle.





## Pätevyyden tutkiminen

- Pätevälle lauseelle $\phi \in \mathcal{L}$ muodostettuun totuustaulukkoon tulee lauseen $\phi$ sarakkeen jokaiselle riville totuusarvo $T$.

**Esimerkki 3.11** Ovatko $A \land B \rightarrow A$ ja $A \lor B \rightarrow A$ päteviä?

| $A$ | $B$ | $A \land B$ | $A \land B \rightarrow A$ | $A \lor B$ | $A \lor B \rightarrow A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $\boxed{T}$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $E$ | $E$ | $\boxed{T}$ | $T$ | $T$ |
| $E$ | $T$ | $E$ | $\boxed{T}$ | $T$ | $\boxed{E}$ |
| $E$ | $E$ | $E$ | $\boxed{T}$ | $E$ | $T$ |

$\Longrightarrow$ $A \land B \rightarrow A$ on pätevä, mutta $A \lor B \rightarrow A$ ei $(\mathcal{A} = \{B\})$. ■





## 3. LOOGINEN SEURAAVUUS

**Määritelmä 3.12** Lause $\phi \in \mathcal{L}$ on lausejoukon $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ *looginen seuraus* (merkitään $\Sigma \models \phi$), jos ja vain jos $\mathcal{A} \models \phi$ kaikille $\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$.

**Väite 3.17** Jos lause $\phi \in \mathcal{L}$ on pätevä (eli $\models \phi$), niin $\Sigma \models \phi$ mille tahansa lausejoukolle $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$.

- *Vastamalleja* käytetään myös loogisen seuraavuuden yhteydessä:

  Jos $\Sigma \not\models \phi$, lausejoukolla $\Sigma$ on malli $\mathcal{A}$ siten, että $\mathcal{A} \not\models \phi$.

- Loogista seuraavuutta voidaan tutkia lausejoukolle $\Sigma \cup \{\alpha\}$ (tai $\Sigma \cup \{\neg\alpha\}$) muodostetusta totuustaulukosta.

## Esimerkki

**Esimerkki 3.16** Tutkitaan, onko lause $\neg L \vee K$ looginen seuraus lamppuesimerkin lausejoukolle $\Sigma = \{P \rightarrow (L \leftrightarrow K), \neg P \rightarrow \neg L\}$:

| $P$ | $L$ | $K$ | $\neg P$ | $\neg L$ | $\neg P \rightarrow \neg L$ | $L \leftrightarrow K$ | $P \rightarrow (L \leftrightarrow K)$ | $\neg L \vee K$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $E$ | $E$ | $T$ | $T$ | $T$ | $\boxed{T}$ |
| $T$ | $T$ | $E$ | $E$ | $E$ | $T$ | $E$ | $E$ | $E$ |
| $T$ | $E$ | $T$ | $E$ | $T$ | $T$ | $E$ | $E$ | $T$ |
| $T$ | $E$ | $E$ | $E$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $\boxed{T}$ |
| $E$ | $T$ | $T$ | $T$ | $E$ | $E$ | $T$ | $T$ | $T$ |
| $E$ | $T$ | $E$ | $T$ | $E$ | $E$ | $E$ | $T$ | $E$ |
| $E$ | $E$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $E$ | $T$ | $\boxed{T}$ |
| $E$ | $E$ | $E$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ | $\boxed{T}$ |

$\Longrightarrow \Sigma \models \neg L \vee K.$ ■





## Loogisten seurauksien ominaisuuksia

**Määritelmä 3.18** Lausejoukon $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ loogisten seurausten joukko on $\mathrm{Cn}(\Sigma) = \{\phi \in \mathcal{L} \mid \Sigma \models \phi\}$.

- Loogisten seuraavuuksien joukko on aina ääretön.
- Lausejoukkon $\mathrm{Cn}(\Sigma)$ voidaan pitää joukon loogisena sulkeumana, koska operaatiolla $\mathrm{Cn}(\cdot)$ on *sulkeumaoperaattorin* ominaisuudet.

**Väite 3.19** Mille tahansa lausejoukoille $\Sigma$, $\Sigma_1$ ja $\Sigma_2$ pätee:

1. $\Sigma \subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma)$.
2. Jos $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$, niin $\mathrm{Cn}(\Sigma_1) \subseteq \mathrm{Cn}(\Sigma_2)$ (monotonisuus).
3. $\mathrm{Cn}(\mathrm{Cn}(\Sigma)) = \mathrm{Cn}(\Sigma)$ (sulkeuma).





## 4. LOOGINEN EKVIVALENSSI

**Määritelmä 3.20** Lauseet $\phi \in \mathcal{L}$ ja $\psi \in \mathcal{L}$ ovat *loogisesti ekvivalentit* (merkitään $\phi \equiv \psi$), jos ja vain jos kaikille totuusjakeluille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ pätee: $\mathcal{A} \models \phi \iff \mathcal{A} \models \psi$.

**Väite 3.22** Kaikille $\phi, \psi \in \mathcal{L}$, $\phi \equiv \psi \iff \mathrm{Mod}(\{\phi\}) = \mathrm{Mod}(\{\psi\})$.

**Esimerkki 3.24** Tutkitaan, ovatko $A \rightarrow B$ ja $\neg B \rightarrow \neg A$ ekvivalentit:

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \rightarrow B$ | $\neg B \rightarrow \neg A$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $E$ | $E$ | $T$ | $T$ |
| $T$ | $E$ | $E$ | $T$ | $E$ | $E$ |
| $E$ | $T$ | $T$ | $E$ | $T$ | $T$ |
| $E$ | $E$ | $T$ | $T$ | $T$ | $T$ |





## Lausejoukkojen tapaus

**Määritelmä 3.27** Lausejoukot $\Sigma_1 \subseteq \mathcal{L}$ ja $\Sigma_2 \subseteq \mathcal{L}$ ovat *loogisesti ekvivalentit* (merkitään $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$), jos ja vain jos kaikille totuusjakeluille $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ pätee: $\mathcal{A} \models \Sigma_1 \iff \mathcal{A} \models \Sigma_2$.

**Väite 3.28** Kaikille $\Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq \mathcal{L}$, $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2 \iff \mathrm{Mod}(\Sigma_1) = \mathrm{Mod}(\Sigma_2)$.

- Väite 3.28 antaa tavan verifioida ekvivalenssi $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$.
- Toinen mahdollisuus on suorittaa lauseiden *ristiintarkistus*:
  1. todetaan, että $\Sigma_1 \models \sigma_2$ kaikille lauseille $\sigma_2 \in \Sigma_2$ ja
  2. todetaan, että $\Sigma_2 \models \sigma_1$ kaikille lauseille $\sigma_1 \in \Sigma_1$.
- Totuustaulukoilla nämä menettelyt ovat jokseenkin samat.

## Esimerkki

**Esimerkki 3.29** Kirjoitetaan lamppuesimerkin järjestelmälle vaihtoehtoinen määritelmä $\Sigma' = \{L \rightarrow P, P \wedge L \rightarrow K, P \wedge K \rightarrow L\}$.

| $P$ | $L$ | $K$ | $L \rightarrow P$ | $P \wedge L$ | $P \wedge L \rightarrow K$ | $P \wedge K$ | $P \wedge K \rightarrow L$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | $T$ | $T$ | $\boxed{T}$ | $T$ | $\boxed{T}$ | $T$ | $\boxed{T}$ |
| $T$ | $T$ | $E$ | $T$ | $T$ | $E$ | $E$ | $T$ |
| $T$ | $E$ | $T$ | $T$ | $E$ | $T$ | $T$ | $E$ |
| $T$ | $E$ | $E$ | $\boxed{T}$ | $E$ | $\boxed{T}$ | $E$ | $\boxed{T}$ |
| $E$ | $T$ | $T$ | $E$ | $E$ | $T$ | $E$ | $T$ |
| $E$ | $T$ | $E$ | $E$ | $E$ | $T$ | $E$ | $T$ |
| $E$ | $E$ | $T$ | $\boxed{T}$ | $E$ | $\boxed{T}$ | $E$ | $\boxed{T}$ |
| $E$ | $E$ | $E$ | $\boxed{T}$ | $E$ | $\boxed{T}$ | $E$ | $\boxed{T}$ |

$\Longrightarrow$ $\mathrm{Mod}(\Sigma') = \mathrm{Mod}(\Sigma)$, $\Sigma' \equiv \Sigma$ ja $\mathrm{Cn}(\Sigma') = \mathrm{Cn}(\Sigma)$. ■





## 5. PERUSKÄSITTEIDEN VÄLISET YHTEYDET

Kaikille lauseille $\phi, \psi \in \mathcal{L}$ ja lausejoukoille $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$:

| | |
|---|---|
| Väite 3.33 | $\phi \equiv \psi \iff \models \phi \leftrightarrow \psi$ |
| Väite 3.34 | $\models \phi \iff \phi \equiv A \vee \neg A$ |
| Väite 3.35 | $\models \phi \iff \emptyset \models \phi$ |
| Väite 3.36 | $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \models \phi \iff \models \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n \rightarrow \phi$ |
| Väite 3.37 | $\Sigma \models \phi \iff \Sigma \cup \{\neg\phi\}$ on toteutumaton. |
| Seurauslause 3.38 | $\models \phi \iff \neg\phi$ on toteutumaton |

➤ Edellä esitetyt yhteydet mahdollistavat lauselogiikan päättelyongelmien väliset *muunnokset*.





## 6. TIETÄMYKSEN ESITTÄMISESTÄ

➤ Jokainen lausejoukko $\Sigma$ määrittää joukon $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ *malleja*, eli totuusjakeluja $\mathcal{A}$, joille pätee $\mathcal{A} \models \Sigma$ (siis $\mathcal{A} \models \phi$ kaikille $\phi \in \Sigma$).

➤ Mallien joukko $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ puolestaan määrää loogisten seurauksien joukon $\mathrm{Cn}(\Sigma) = \{\phi \in \mathcal{L} \mid \Sigma \models \phi\} = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathrm{Mod}(\Sigma)} \{\phi \in \mathcal{L} \mid \mathcal{A} \models \phi\}$.

➤ Atomisten lauseiden joukkoon $\mathcal{P}$ perustuvia lausejoukkoja $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ voidaan olennaisesti määritellä $2^{2^{|\mathcal{P}|}}$ erilaista.

**Esimerkki 3.39** Lamppuesimerkin lausejoukolle

$$\Sigma = \{\neg P \rightarrow \neg L, P \rightarrow (L \leftrightarrow K)\} \subseteq \mathcal{L}$$

todettiin mallit $\mathcal{A}_1 = \{P, L, K\}$, $\mathcal{A}_2 = \{P\}$, $\mathcal{A}_3 = \{K\}$ ja $\mathcal{A}_4 = \{\}$.

**Esimerkki 3.40** Lamppuesimerkissä lausejoukon $\Sigma$ loogisten seurausten joukko on $\mathrm{Cn}(\Sigma) = \{\neg L \vee K, L \rightarrow P \wedge K, \neg P \vee P, \ldots\}$.





## Tavoite

*Tietämyksen esittämisen* perusongelma on rajata mallien joukko sopivilla lauseilla siten, että saadaan halutut loogiset seuraukset.

➤ Lähtökohtana olevan tyhjän lausejoukon $\emptyset$ malleja ovat kaikki totuusjakelut. Täten $\mathrm{Cn}(\emptyset)$ on pätevien lauseiden joukko.

➤ Lauseiden lisääminen karsii mahdollisesti mallien joukkoa ja kasvattaa loogisten seurausten joukkoa *(monotonisuus)*.

➤ Ääritapauksena $\Sigma$ voi tulla *ristiriitaiseksi* eli *toteutumattomaksi* (liikaa vaatimuksia), jolloin $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \emptyset$ ja $\mathrm{Cn}(\Sigma) = \mathcal{L}$.

**Esimerkki 3.43** Lamppuesimerkissä $\Sigma \not\models L \leftrightarrow K$, mutta lisäämällä lause $P$ saadaan $\Sigma \cup \{P\} \models L \leftrightarrow K$. Sen sijaan lausejoukko $\Sigma \cup \{L, P \underline{\vee} K\}$ on ristiriitainen/toteutumaton.

## TAVOITTEET

- Ymmärrät mallin käsitteen sekä mallien roolin tietämyksen esittämisessä (kytkentä mallien ja kuvattavan järjestelmän välillä).
- Hallitset semanttisten peruskäsitteiden *toteutuvuus*, *pätevyys*, *looginen seuraavuus* ja *looginen ekvivalenssi* määritelmät.
- Tiedät, miten vastaavat loogiset päättelytehtävät ovat suoritettavissa totuustaulukkojen avulla.
- Osaat tarvittaessa suorittaa loogisten päättelytehtävien välisiä muunnoksia (esim. ajatellen toteutuvuustarkistimen käyttöä).
- Osaat todistaa peruskäsitteitä koskevia yksinkertaisia väittämiä.





## PÄIVÄN PÄHKINÄ

Olkoon $\mathcal{L}$ atomisten lauseiden joukkoon $\mathcal{P}$ perustuva kieli.

- Olkoon $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$ lausejoukko, jolla on yksikäsitteinen malli eli $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \{\mathcal{A}\}$ jollekin totuusjakelulle $\mathcal{A}$.
- Todista alla annettu väite, jonka perusteella kaikille $\phi \in \mathcal{L}$, joko $\phi \in \mathrm{Cn}(\Sigma)$ tai $\neg\phi \in \mathrm{Cn}(\Sigma)$ (muttei molemmat; vrt. väite 2.11).
- Anna vastaesimerkki lauseeksi $\phi$, jonka perusteella lamppuesimerkille laaditulla määritelmällä ei ole tätä ominaisuutta.

**Väite** Jos $\mathrm{Mod}(\Sigma) = \{\mathcal{A}\}$, niin kaikille lauseille $\phi \in \mathcal{L}$,

1. $\phi \in \mathrm{Cn}(\Sigma) \iff \mathcal{A} \models \phi$ ja
2. $\neg\phi \in \mathrm{Cn}(\Sigma) \iff \mathcal{A} \not\models \phi$.