Luento 1: Lauselogiikan syntaksi ja semantiikka

Sisältö

1. Lauselogiikan kieli
2. Lauseiden muodostaminen
3. Sopimukset sulkeiden käytöstä
4. Totuustaulukot
5. Konnektiivien määriteltävyys
6. Lauselogiikan totuusmääritelmä

1. LAUSELOGIIKAN KIELI

Lauselogiikan aakkosto koostuu seuraavista symboleista:

- atomiset lauseet: $A, A_1, A_2, \ldots, B, B_1, \ldots, C, \ldots$
- negaatiosymboli: $\neg$ (ei)
- konjunktiosymboli: $\wedge$ (ja)
- disjunktiosymboli: $\vee$ (tai)
- implikaatiosymboli: $\rightarrow$ (jos ... niin)
- ekvivalenssisymboli: $\leftrightarrow$ (jos ja vain jos)
- sulut: ()

Symboleja $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ kutsutaan *konnektiiveiksi*.

Kielen määritelmä

Määritelmä 1.1 Ei-tyhjään atomisten lauseiden joukkoon $\mathcal{P}$ perustuvan lauselogiikan kielen $\mathcal{L}$ *lauseet* muodostetaan seuraavasti:

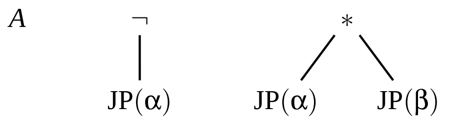
1. Jokainen atominen lause $A \in \mathcal{P}$ on lause.
2. Jos α ja β ovat lauseita, niin myös $(\neg\alpha)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ ovat lauseita.
3. Ainoastaan kahden edeltävän säännön perusteella muodostetut merkkijonot ovat lauseita.

Esimerkki 1.2 Jos $\mathcal{P} = \{A, B\}$, niin esimerkiksi $A, B, (\neg A), ((\neg A) \vee B)$ ja $(((\neg A) \vee B) \rightarrow A)$ ovat lauseita, muttei $(\neg())$ eikä $(A \vee C)$. ■

Jäsennyspuut

Määritelmä 1.4 Määritellään *jäsennyspuut* lauserakenteen mukaisesti:

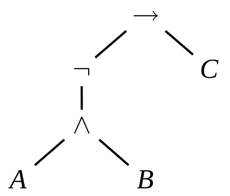
1. Atomisen lauseen $A \in \mathcal{P}$ jäsennyspuu $\mathrm{JP}(A)$ on alla vasemmalla.
2. Negaation $(\neg\alpha)$ jäsennyspuu $\mathrm{JP}(\neg\alpha)$ on annettu keskellä.
3. Jos $*$ on jokin lauselogiikan *binäärikonnektiiveista*, lauseen $(\alpha * \beta)$ jäsennyspuu $\mathrm{JP}(\alpha * \beta)$ on annettu oikealla.



Yllä $\mathrm{JP}(\alpha)$ ja $\mathrm{JP}(\beta)$ ovat lauseiden α ja β rekursiivisesti määräytyvät jäsennyspuut, jotka sijoitetaan kyseisten jäsennyspuiden *alipuiksi*.

Esimerkki

Lauseen $((\neg(A \wedge B)) \rightarrow C)$ jäsennyspuu on seuraava:



- Lause on muodoltaan *implikaatio* juuren konnektiivin $\rightarrow$ nojalla.
- Vastaavasti voidaan tunnistaa lauseet, jotka ovat *negaatioita*, *konjunktioita*, *disjunktioita* ja *ekvivalensseja*.
- Lauseiden ominaisuuksia voidaan todistaa induktiolla *lauserakenteen suhteen* (tai jäsennyspuiden rakenteen suhteen).

2. LAUSEIDEN MUODOSTAMINEN

Jos lähtökohtana on joukko luonnollisen kielen lauseita,

1. tunnistetaan atomiset lauseet eli väittämät, joita ei voida enää loogisessa mielessä pilkkoa osiin ja
2. tunnistetaan konnektiivit ja muodostetaan vastaavat lauseet.

Esimerkki 1.6 Ilmaistaan lauselogiikalla periaate "*Jos tiedosto on liian suuri, niin se tiivistetään tai poistetaan*". Valitaan atomiset lauseet

A = "Tiedosto on liian suuri",
B = "Tiedosto tiivistetään" ja
C = "Tiedosto poistetaan".

Sijoittamalla nämä saadaan alustava lause: Jos A, niin B tai C.

Tunnistetaan konnektiivit: $(A \rightarrow (B \vee C))$. ■

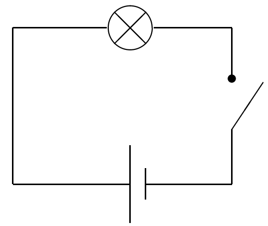
Järjestelmän määrittely

Määritelmä voidaan myös kirjoittaa suoraan lauselogiikalla

1. valitsemalla sopiva joukko järjestelmän ominaisuuksia kuvaavia atomisia lauseita ja
2. määrittelemällä näiden väliset loogiset riippuvuudet lauseilla.

Esimerkki Mallinnetaan seuraava järjestelmä lauselogiikalla:

Valitaan atomisiksi lauseiksi:
L = "Lamppu palaa",
K = "Kytkin on suljettu" ja
P = "Paristossa on riittävästi varausta".



Määritelmään kirjataan lauseet $((\neg P) \rightarrow (\neg L))$ ja $(P \rightarrow (L \leftrightarrow K))$. ■

3. SOPIMUKSET SULKEIDEN KÄYTÖSTÄ

- Uloimmat sulkeet on tapana jättää pois: $(A \rightarrow B) \rightsquigarrow A \rightarrow B$.
- Konnektiivien *presedenssi* eli *sidontajärjestys* (määritelmä 1.8):
  1. $\neg$ on vahvin konnektiiveista.
  2. $\vee$ ja $\wedge$ ovat heikompia kuin $\neg$, mutta vahvempia kuin $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$.
  3. $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ ovat heikoimmat konnektiivit.

  Esimerkki 1.9: $(\neg A) \rightarrow B \rightsquigarrow \neg A \rightarrow B$
  $(A \wedge B) \rightarrow (B \vee C) \rightsquigarrow A \wedge B \rightarrow B \vee C$

  Toisaalta sulkeet on säilytettävä lauseessa $(A \rightarrow B) \vee (B \leftrightarrow C)$. ■
- Poikkeuksena ketjudisjunktiot/konjunktiot: kirjoitetaan $A \vee B \vee C$ lauseiden $A \vee (B \vee C)$ ja $(A \vee B) \vee C$ sijaan.

4. TOTUUSTAULUKOT

- *Perustotuustaulukoilla* (kuva 2.1) määritellään eri lausemuotojen totuusarvot alilauseidensa totuusarvojen funktiona.
- Totuustaulukot on helppo sisäistää muistisääntöjen avulla:

$\alpha \wedge \beta$ on tosi $\iff$ α on tosi **ja** β on tosi.

α	$(\neg\alpha)$
T	E
E	T

α	β	$(\alpha \wedge \beta)$
T	T	T
T	E	E
E	T	E
E	E	E

α	β	$(\alpha \vee \beta)$
T	T	T
T	E	T
E	T	T
E	E	E

Perustotuustaulukot

- Muiden konnektiivien perustotuustaulukot ovat alla (kuva 2.2).
- Erityisesti $\alpha \rightarrow \beta$ on tosi $\iff$ α on epätosi **tai** β on tosi

  $\iff$ **jos** α on tosi, **niin** β on tosi.
- Implikaatio $\rightarrow$ *ei* edellytä syy-seuraus-suhdetta!

α	β	$(\alpha \rightarrow \beta)$
T	T	T
T	E	E
E	T	T
E	E	T

α	β	$(\alpha \leftrightarrow \beta)$
T	T	T
T	E	E
E	T	E
E	E	T

α	β	$(\alpha \underline{\vee} \beta)$
T	T	E
T	E	T
E	T	T
E	E	E

© 2008 TKK / Tietojenkäsittelytieteen laitos

Totuustaulukon muodostaminen

Perustotuustaulukoiden avulla voidaan muodostaa totuustaulukko mille tahansa lauseelle $\phi \in \mathcal{L}$ (tai lausejoukolle $\Sigma \subseteq \mathcal{L}$).

1. Muodostetaan sarakkeet atomisille lauseille $A \in \mathrm{At}(\phi)$ / $A \in \mathrm{At}(\Sigma)$ ja näille kaikki totuusarvojen yhdistelmät.
2. Lasketaan systemaattisesti kaikkien *alilauseiden* totuusarvot.

Esimerkki 2.2 Lauseen $\neg B \wedge (A \rightarrow B)$ totuustaulukko on seuraava:

A	B	$\neg B$	$(A \rightarrow B)$	$(\neg B \wedge (A \rightarrow B))$
T	T	E	T	E
T	E	T	E	E
E	T	E	T	E
E	E	T	T	T

© 2008 TKK / Tietojenkäsittelytieteen laitos

5. KONNEKTIIVIEN MÄÄRITELTÄVYYS

Esimerkki 2.3 Lauseiden $(\alpha \wedge \beta)$ ja $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$ totuustaulukon

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\neg\alpha$	$\neg\beta$	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
T	T	T	E	E	E	T
T	E	E	E	T	T	E
E	T	E	T	E	T	E
E	E	E	T	T	T	E

perusteella ko. lauseilla on aina samat totuusarvot. ■

$\Longrightarrow$ Lause $\alpha \wedge \beta$ voidaan (tarvittaessa) määritellä syntaktisena *lyhennysmerkintänä* lauseelle $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$.

© 2008 TKK / Tietojenkäsittelytieteen laitos

Tyypillisiä määritelmiä

Konnektiiveja voidaan määritellä toistensa avulla (taulukko 2.1):

- $(\alpha \wedge \beta)$ lauseena $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
- $(\alpha \vee \beta)$ lauseena $\neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$
- $(\alpha \rightarrow \beta)$ lauseena $(\neg\alpha \vee \beta)$ tai lauseena $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$
- $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ lauseena $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha))$ tai lauseena $((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta))$

$\Longrightarrow$ Kaikkia peruskonnektiiveista $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$ ei välttämättä tarvita.

Konnektiivien riittävyys

- Tarvittaessa voidaan rajoittua seuraaviin konnektiiveihin:
  1. $\neg$ ja $\vee$ riittävät toisten ($\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\underline{\vee}$) määrittelemiseen,
  2. $\neg$ ja $\wedge$ riittävät myös,
  3. $\neg$ ja $\rightarrow$ riittävät myös ja
  4. $\perp$ (aina epätosi lause) ja $\rightarrow$ riittävät myös.
- Toisaalta esim. $\neg$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ ja $\leftrightarrow$ eivät ole yksinään riittäviä.
- Peircen nuoli $(\alpha \downarrow \beta) \equiv \neg(\alpha \vee \beta)$ ja Shefferin viiva $(\alpha \mid \beta) \equiv \neg(\alpha \wedge \beta)$ riittävät yksinään muiden määrittelemiseen.
- Muitakin *binäärikonnektiiveja* $\alpha * \beta$ on määriteltävissä.

6. LAUSELOGIIKAN TOTUUSMÄÄRITELMÄ

Määritelmä 2.7 *Totuusjakelu* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ määrää, mitkä joukon $\mathcal{P}$ lauseista ovat *tosia*, jolloin erotuksen $\mathcal{P} \setminus \mathcal{A}$ lauseet ovat *epätosia*.

- Jos $\mathcal{P}$ on äärellinen, erilaisia totuusjakeluja on $2^{|\mathcal{P}|}$ kappaletta.
- Totuusjakelut ja totuustaulukon rivit vastaavat toisiaan.
- Totuusjakelu voidaan ymmärtää yhden *asiaintilan* kuvauksena.

Esimerkki 2.8 Lamppuesimerkin tapauksessa esimerkiksi

$\mathcal{A}_2 = \{L, K\}$: Patterissa ei ole riittävästi varausta.
Lamppu palaa.
Kytkin on suljettu.

vaikuttaa fyysisesti mahdottomalta asiantilalta. ■

Induktiivinen määritelmä

Keskeiset merkinnät: $\mathcal{A} \models \phi$ (lause $\phi \in \mathcal{L}$ on *tosi* totuusjakelussa $\mathcal{A}$) ja $\mathcal{A} \not\models \phi$ (lause ϕ on *epätosi* totuusjakelussa $\mathcal{A}$).

Määritelmä 2.9 Kaikille $A \in \mathcal{P}$ ja kaikille lauseille $\alpha, \beta \in \mathcal{L}$:

1. $\mathcal{A} \models A \iff A \in \mathcal{A}$.
2. $\mathcal{A} \models \neg\alpha \iff \mathcal{A} \not\models \alpha$.
3. $\mathcal{A} \models \alpha \wedge \beta \iff \mathcal{A} \models \alpha$ ja $\mathcal{A} \models \beta$.
4. $\mathcal{A} \models \alpha \vee \beta \iff \mathcal{A} \models \alpha$ tai $\mathcal{A} \models \beta$.
5. $\mathcal{A} \models \alpha \rightarrow \beta \iff \mathcal{A} \not\models \alpha$ tai $\mathcal{A} \models \beta$.
6. $\mathcal{A} \models \alpha \leftrightarrow \beta \iff$ joko $\mathcal{A} \models \alpha$ ja $\mathcal{A} \models \beta$, tai $\mathcal{A} \not\models \alpha$ ja $\mathcal{A} \not\models \beta$.

Väite 2.11 Jokaiselle $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ ja $\phi \in \mathcal{L}$, joko $\mathcal{A} \models \phi$ tai $\mathcal{A} \not\models \phi$.

TAVOITTEET

- Osaat tulkita annetut lauselogiikan lauseet luonnolliselle kielelle, kun atomisten lauseiden merkitykset on annettu.
- Osaat muodostaa syntaksiltaan oikeellisia lauselogiikan lauseita ainakin luonnollisen kielen välityksellä.
- Tunnistat lauseiden muodon eli osaat jäsentää lauseita.
- Tiedät, että loogisten operaatioiden valinnalla on vaikutuksia vastaavan kielen ilmaisuvoimaan.
- Osaat laskea lauseiden totuusarvoja atomisten lauseiden totuusarvoista lähtien (totuustaulukoilla ja totuusmäärittelmällä).

PÄIVÄN PÄHKINÄ

Alla on määritelty konnektiivi "*jos* α *niin* β *muutoin* γ":

α	β	γ	$(\alpha ? \beta : \gamma)$
T	T	T	T
T	T	E	T
T	E	T	E
T	E	E	E
E	T	T	T
E	T	E	E
E	E	T	T
E	E	E	E

Anna tälle määritelmä negaation, konjunktion ja disjunktion avulla.