T-79.3001 **Kevät 2006**

Logiikka tietotekniikassa: perusteet

Laskuharjoitus 8 (opetusmoniste, kappaleet 2.3 – 3.4)

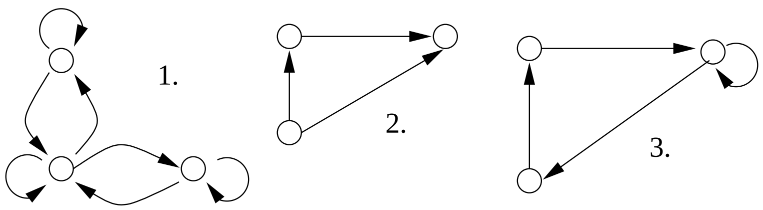
21. – 24.3.2006

1. Olkoon R kaksipaikkainen predikaattisymboli, jonka tulkintana on relaatio $R^{\mathcal{A}} \subseteq A \times A$ (joukko A on struktuurin $\mathcal{A}$ universumi). Alla on taulukko lauseista, jotka määrittelevät relaatiolle $R^{\mathcal{A}}$ erilaisia ominaisuuksia.

Ominaisuus	Määritelmä
refleksiivisyys	$\forall x R(x,x)$
irrefleksiivisyys	$\forall x \neg R(x,x)$
symmetrisyys	$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$
asymmetrisyys	$\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$
transitiivisyys	$\forall x \forall y \forall z (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$
sarjallisuus	$\forall x \exists y R(x,y)$

Olkoon universumi A kaikkien ihmisten joukko. Anna esimerkkejä relaatioista $R^{\mathcal{A}}$, $(\emptyset \subset R^{\mathcal{A}} \subset A^2)$, joilla on yllä määriteltyjä ominaisuuksia.

Allaolevat kolme graafia pyrkivät selventämään eri relaatioiden ominaisuuksia. Tässä solmut ovat struktuurin alkioita, ja solmuja yhdistää kaari, jos $R(x,y)$ on tosi, silloin kun $x \in A, y \in A$. Loogisia rakenteita havainnollistetaan aina silloin tällöin niitä vastaavien graafien avulla.



Refleksiivisyys ($\forall x R(x,x)$) tarkoittaa sitä, että graafin kaikista solmuista on kaari takaisin itseensä, ja irrefleksiivisyys ($\forall x \neg R(x,x)$) vastaavasti sitä, että yhdessäkään solmussa ei ole itseään osoitavaa kaarta. Graafeista ensimmäinen on refleksiivinen, toinen irrefleksiivinen ja kolmas ei ole kumpaakaan.

Symmetrisyys ($\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$) tarkoittaa sitä, että aina kun solmusta x on kaari solmuun y, graafissa on myös kaari y:stä x:ään. Asymmetrisellä ($\forall x \forall y (R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x))$) graafilla ei ole yhtään paluukaarta. Kuvan graafeista 1. on symmetrinen, 2. asymmetrinen ja 3. ei kumpaakaan.

Transitiivisessa graafissa ($\forall x \forall y \forall z(R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$) pätee, että mikäli solmusta x päästään kaaria seuraamalla (mahdollisesti muiden solmujen kautta) solmuun y, pääsee solmusta x myös suoraan solmuun y. Kuvan graafeista ainoastaan keskimmäinen on transitiivinen.

Graafin sarjallisuus ($\forall x \exists y R(x,y)$) tarkoittaa sitä, että kaikista solmuista lähtee ainakin yksi kaari. Kuvan graafeista ensimmäinen ja viimeinen ovat sarjallisia.

Ominaisuuksien ihmisten joukossa tapahtuvaa tarkastelua varten määritellään seuraavat relaatiot: $T(x,y)$ (x tuntee y:n), $N(x,y)$ (x on naimisissa y:n kanssa), $V(x,y)$ (y on x:n vanhempi) ja $E(x,y)$ (y on x:n esi-isä). Nämä relaatiot toteuttavat ominaisuuksia seuraavan taulukon mukaisesti.

Relaatio	refl.	irrefl.	symm.	asymm.	trans.	sarj.
tuttu	*		*			*
aviopuoliso		*	*			
vanhempi		*		*		*
esi-isä		*		*	*	*

Koska ihminen tuntee itsensä, ja tutut tuntevat toisensa, on $T(x,y)$ refleksiivinen, symmetrinen ja sarjallinen. Aviopuolisot ovat naimisissa toistensa kanssa, eikä kukaan voi olla naimisissa itsensä kanssa, joten $N(x,y)$ on irrefleksiivinen ja symmetrinen. Vanhemmuus on irrefleksiivinen, asymmetrinen (kukaan ei voi olla oma isovanhempansa) ja sarjallinen (kaikilla on vanhemmat). Esi-isä –relaatio on kuten vanhemmuus, mutta sen lisäksi myös transitiivinen, koska jos Kalle on Pekan esi-isä, ja Pekka Juhan, niin Kalle on myös Juhan esi-isä.

2. Osoita, että seuraavat lauseet eivät ole päteviä konstruoimalla struktuuri, jossa lause on epätosi (vastamalli).

a) $\forall x \exists y P(x,y) \rightarrow \exists y \forall x P(x,y)$

b) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

c) $\neg \forall x(P(x) \rightarrow R(x)) \vee \neg \forall x(P(x) \rightarrow \neg R(x))$

Ratk.

a) Olkoon $\mathcal{A} = \{1,2\}$ ja $P^{\mathcal{A}} = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle\}$. Nyt $\forall x \exists y P(x,y)$ pätee (kummallekin alkiolle 1. positiossa löytyy vastine). Toisaalta $\exists y \forall x P(x,y)$ ei päde koska ei ole predikaatin tulkinnassa ei ole sellaista alkiota 2. positiossa, jolle löytyisi parit siten, että molemmat alkiot esiintyisivät 1. positiossa. Näin ollen implikaatio on epätosi.

b) Olkoon $\mathcal{A} = \{1\}$ ja $P^{\mathcal{A}} = \{1\}, Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$. Nyt implikaation vasen puoli on tosi ja oikea epätosi ja struktuuri näin vastaesimerkki.

c) Lauseessa pitäisi saada disjunktio epätodeksi. Tämä edellyttää, että molemmat argumentit ovat epätosia. Koska niiden edessä on negaatio, pitää siis molemmilla puolilla negaatioiden sisällä oleva osuus olla tosi.

Olkoon $\mathcal{A} = \{1\}$ ja $P^{\mathcal{A}} = \emptyset, R^{\mathcal{A}} = \{1\}$. Nyt $\forall x(P(x) \to R(x))$ on tosi, koska sen vasen puoli on epätosi. Samalla argumentilla $\forall x(P(x) \to \neg R(x))$ on tosi. Näiden vaatimusten voidaan ajatella kuvaavan osajoukkorelaatiota. Ensimäisessä tapauksessa P:n tulkinnan tulisi olla R:n tulkinnan osajoukko ja toisessa R:n tulkinnan komplementin osajoukko. Ainoa joukko, joka molemmat vaatimukset täyttää on tyhjä joukko, joka siis on asetettu P:n tulkinnaksi.

3. Muunna seuraavat lauseet konjunktiiviseen normaalimuotoon ja suorita skolemointi.

a) $\forall y(\exists x P(x,y) \to \forall z Q(y,z)) \wedge \exists y(\forall x R(x,y) \vee \forall x Q(x,y))$.

b) $\exists x \forall y R(x,y) \leftrightarrow \forall y \exists x P(x,y)$.

c) $\forall x \exists y Q(x,y) \vee (\exists x \forall y P(x,y) \wedge \neg \exists x \exists y P(x,y))$.

d) $\neg(\forall x \exists y P(x,y) \to \exists x \exists y R(x,y)) \wedge \forall x \neg \exists y Q(x,y)$.

Ratk.
Muunnettaessa predikaattilogiikan lauseita normaalimuotoihin, tuli noudattaa seuraavaa algoritmia:

- Poistetaan konnektiivit $\to$ ja $\leftrightarrow$.
- Negaatiot sisään, kvanttorit ulos.
- Distribuutiosäännöillä haluttu lopullinen muoto (KNM tai DNM).

a)

$$
\begin{aligned}
&\forall y(\exists x P(x,y) \to \forall z Q(y,z)) \wedge \exists y(\forall x R(x,y) \vee \forall x Q(x,y)) \\
\equiv &\forall y(\neg \exists x P(x,y) \vee \forall z Q(y,z)) \wedge \exists y(\forall x R(x,y) \vee \forall x Q(x,y)) \\
\equiv &\forall y(\forall x \neg P(x,y) \vee \forall z Q(y,z)) \wedge \exists y(\forall x R(x,y) \vee \forall x Q(x,y)) \\
\equiv &\exists y_1(\forall y(\forall x \neg P(x,y) \vee \forall z Q(y,z)) \wedge (\forall x R(x,y_1) \vee \forall x Q(x,y_1))) \\
\equiv &\exists y_1 \forall y_2((\forall x \neg P(x,y_2) \vee \forall z Q(y_2,z)) \wedge (\forall x R(x,y_1) \vee \forall x Q(x,y_1))) \\
\equiv &\exists y_1 \forall y_2 \forall x_1 \forall x_2 \forall z \forall x_3((\neg P(x_1,y_2) \vee Q(y_2,z)) \wedge (R(x_2,y_1) \vee Q(x_3,y_1)))
\end{aligned}
$$

Nyt havaitaan, että kvanttoreita sisältämätön osa on konjunktiivisessa normaalimuodossa. Skolemoinnissa uloimmat eksistenssikvanttorit korvataan vakioilla, ja universaalikvanttoreiden sisällä olevat Skolemfunktioilla. Tässä saadaan seuraava lause:

$$\forall y_2 \forall x_1 \forall x_2 \forall z \forall x_3 ((\neg P(x_1, y_2) \vee Q(y_2, z)) \wedge (R(x_2, c) \vee Q(x_3, c)))$$

c)

$$\begin{aligned}
&\forall x \exists y Q(x,y) \vee (\exists x \forall y P(x,y) \wedge \neg \exists x \exists y P(x,y)) \\
\equiv &\forall x \exists y Q(x,y) \vee (\exists x \forall y P(x,y) \wedge \forall x \forall y \neg P(x,y)) \\
\equiv &\forall x \exists y Q(x,y) \vee \exists x_1 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 (P(x_1,y_1) \wedge \neg P(x_2,y_2)) \\
\equiv &\exists x_1 \forall x_3 \exists y_3 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 (Q(x_3,y_3) \vee (P(x_1,y_1) \wedge \neg P(x_2,y_2)))
\end{aligned}$$

Lause on nyt nk. Prenex-normaalimuodossa, josta voidaan jatkaa konjunktiiviviseen normaalimuotoon.

$$\exists x_1 \forall x_3 \exists y_3 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 ((Q(x_3,y_3) \vee P(x_1,y_1)) \wedge (Q(x_3,y_3) \vee \neg P(x_2,y_2)))$$

Skolemoinnissa x_1 korvataan vakiolla ja y_3 lausutaan x_3:n funktiona.

$$\forall x_3 \forall y_1 \forall x_2 \forall y_2 ((Q(x_3, f(x_3)) \vee P(c,y_1)) \wedge (Q(x_3, f(x_3)) \vee \neg P(x_2,y_2)))$$

4. Johda muista kvanttorisäännöistä säännöt, joilla kvanttorit $\forall x$ ja $\exists x$ voidaan tuoda allaolevista lausemuodoista ulos siten, että sulkujen sisälle jäävä alikaava säilyy muodoltaan implikaationa.

a) $\forall x \phi(x) \to \psi$

b) $\exists x \phi(x) \to \psi$

c) $\phi \to \forall x \psi(x)$

d) $\phi \to \exists x \psi(x)$

Ratk.
Tehtävässä sovelletaan jo aikaisemmin tutuksi käyneitä normaalimuotosääntöjä.

a)

$$\begin{aligned}
&\forall x \phi(x) \to \psi \\
\equiv &\neg \forall x \phi(x) \vee \psi \\
\equiv &\exists x \neg \phi(x) \vee \psi \\
\equiv &\exists x_1 (\neg \phi(x_1) \vee \psi) \\
\equiv &\exists x_1 (\phi(x_1) \to \psi)
\end{aligned}$$

b) Vastaavasti, $\exists x\phi(x) \to \psi \equiv \forall x_1(\phi(x_1) \to \psi)$.

c)

$$\begin{aligned}
&\phi \to \forall x\psi(x) \\
\equiv&\neg\phi \vee \forall x\psi(x) \\
\equiv&\forall x_1(\neg\phi \vee \psi(x_1)) \\
\equiv&\forall x_1(\phi \to \psi(x_1))
\end{aligned}$$

d) Vastaavasti, $\phi \to \exists x\psi(x) \equiv \exists x_1(\phi \to \psi(x_1))$.

Säännönmukaisuutena voidaan havaita, että mikäli kvantifiointi on implikaation vasemmalla puolella, muuttuu kvanttori. Oikealla puolella se säilyy.

5. Muunna seuraavat lauseet klausuulimuotoon:

a) $\neg\exists x((P(x) \to P(a)) \wedge (P(x) \to P(b)))$,

b) $\forall y\exists xP(x,y)$,

c) $\neg\forall y\exists xG(x,y)$ ja

d) $\exists x\forall y\exists z(P(x,z) \vee P(z,y) \to G(x,y))$.

Ratk.

a) Lause $\neg\exists x((P(x) \to P(a)) \wedge (P(x) \to P(b)))$:
Eliminoidaan implikaatiot: $\neg\exists x((\neg P(x) \vee P(a)) \wedge (\neg P(x) \vee P(b)))$.
Viedään $\neg$ kvanttorin $\exists x$ sisään:
$\forall x\neg((\neg P(x) \vee P(a)) \wedge (\neg P(x) \vee P(b)))$.
Viedään negaatiot lausekkeiden sisään:
$\forall x((P(x) \wedge \neg P(a)) \vee (P(x) \wedge \neg P(b)))$.
Tuodaan $P(x)$ ulos: $\forall x(P(x) \wedge (\neg P(a) \vee \neg P(b)))$.
Jätetään universaalikvanttorit pois: $P(x) \wedge (\neg P(a) \vee \neg P(b))$.
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{P(x)\},\ \{\neg P(a),\ \neg P(b)\}\}$.

b) Lause $\forall y\exists xP(x,y)$:
Skolemointi: $\forall yP(f(y),y)$.
Jätetään universaalikvanttorit pois: $P(f(y),y)$.
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{P(f(y),y)\}\}$.

c) Lause $\neg\forall y\exists xG(x,y)$:
Viedään $\neg$ kvanttorin $\forall y$ sisään: $\exists y\neg\exists xG(x,y)$.
Viedään $\neg$ kvanttorin $\exists x$ sisään: $\exists y\forall x\neg G(x,y)$
Skolemointi: $\forall x\neg G(x,c)$.
Jätetään universaalikvanttorit pois: $\neg G(x,c)$.
Muodostetaan klausuuliesitys: $\{\{\neg G(x,c)\}\}$.

d) Lause $\exists x \forall y \exists z (P(x,z) \vee P(z,y) \to G(x,y))$:

Eliminoidaan implikaatio: $\exists x \forall y \exists z (\neg (P(x,z) \vee P(z,y)) \vee G(x,y))$.

Viedään negaatiot lausekkeen sisään:

$\exists x \forall y \exists z ((\neg P(x,z) \wedge \neg P(z,y)) \vee G(x,y))$.

Viedään $G(x,y)$ lausekkeen sisään:

$\exists x \forall y \exists z ((\neg P(x,z) \vee G(x,y)) \wedge (\neg P(z,y) \vee G(x,y)))$.

Skolemointi: $\forall y \exists z ((\neg P(c,z) \vee G(c,y)) \wedge (\neg P(z,y) \vee G(c,y)))$.

Skolemointi: $\forall y ((\neg P(c, f(y)) \vee G(c,y)) \wedge (\neg P(f(y),y) \vee G(c,y)))$.

Jätetään universaalikvanttorit pois:

$(\neg P(c, f(y)) \vee G(c,y)) \wedge (\neg P(f(y),y) \vee G(c,y))$.

Muodostetaan klausuuliesitys:

$\{\{\neg P(c, f(y)), G(c,y)\},\ \{\neg P(f(y),y), G(c,y)\}\}$.