T-79.3001 **Kevät 2006**

Logiikka tietotekniikassa: perusteet

Laskuharjoitus 4 (lauselogiikka, kappaleet 4.1 – 5.3)

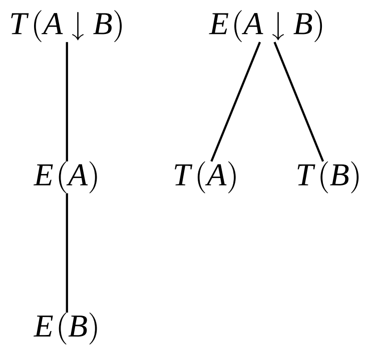
7. – 10.2.2006

1. Peircen nuoli määritellään seuraavasti:

$$A \downarrow B \Leftrightarrow_{def} \neg A \wedge \neg B.$$

Määrittele sille semanttisen taulun säännöt.

Ratk.
Käyttäen määritelmää ja semanttisen taulun sääntöjä peruskonnektiiveille saadaan Peircen nuolen semanttisen taulun säännöiksi seuraavat:



2. Todista semanttisella taululla seuraavien lauseiden pätevyys.

a) $A \to (B \to B)$,

b) $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$,

c) $(A \to B) \wedge (A \to C) \to (A \to B \wedge C)$ ja

d) $(A \to C) \wedge (B \to C) \wedge (A \vee B) \to C$.

Semanttiset taulut konstruoidaan todistettavien kaavojen negaatioille. Taulun kaikkien haarojen tulee sulkeutua ristiriitaan, jotta taulun juuressa $F(\phi)$ oleva lause ϕ on pätevä. Jos taulun haara sulkeutuu ennen koko puun valmistumista, kyseistä haaraa ei enää laajenneta sääntöjä sovellettaessa.

Huomaa, että semanttista taulua käytetään itse asiassa lauseen $\neg\phi$ mallien selvittämiseen. Jos taulun kaikki haarat menevät ristiriitaisiksi lauseella $\neg\phi$ ei ole yhtään mallia (eli $\neg\phi$ on toteutumaton), joten lause ϕ pätevä.

Ratk.

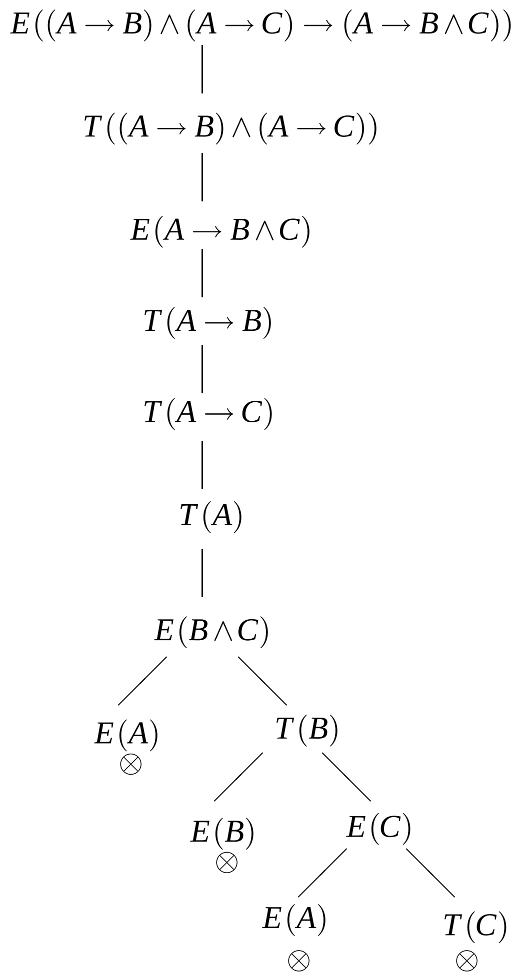
a) $A \rightarrow (B \rightarrow B)$:

$$\begin{array}{c}
E(A \rightarrow (B \rightarrow B)) \\
| \\
T(A) \\
| \\
E(B \rightarrow B) \\
| \\
T(B) \\
| \\
E(B) \\
\otimes
\end{array}$$

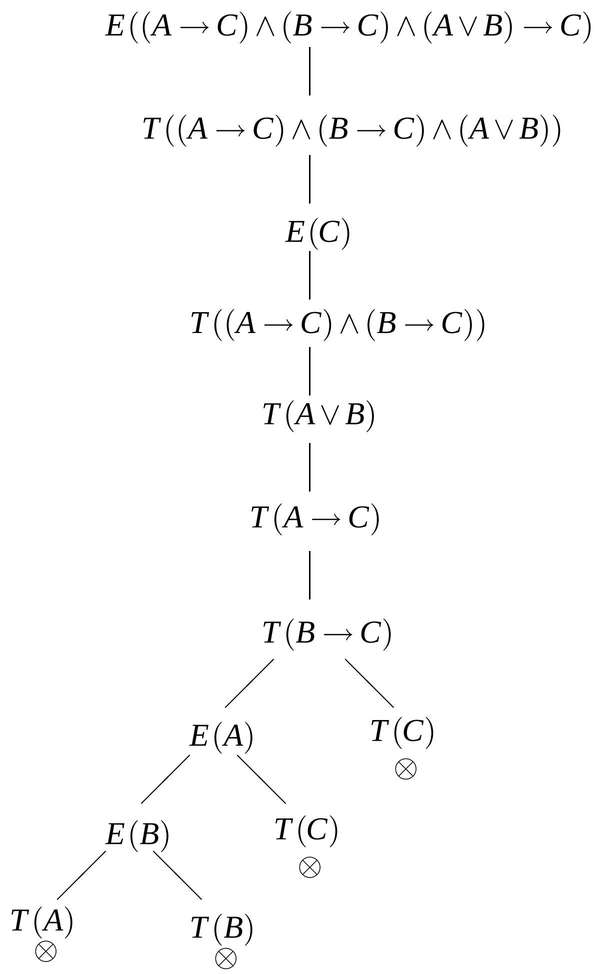
b) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$:

$$\begin{array}{c}
E((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \\
| \\
T((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)) \\
| \\
E(A \rightarrow C) \\
| \\
T(A \rightarrow B) \\
| \\
T(B \rightarrow C) \\
| \\
T(A) \\
| \\
E(C) \\
\begin{array}{cc}
\swarrow & \searrow \\
\begin{array}{c} E(A) \\ \otimes \end{array} & \begin{array}{c} T(B) \\ \begin{array}{cc} \swarrow & \searrow \\ \begin{array}{c} E(B) \\ \otimes \end{array} & \begin{array}{c} T(C) \\ \otimes \end{array} \end{array} \end{array}
\end{array}
\end{array}$$

c) $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C)$:



d) $(A \to C) \wedge (B \to C) \wedge (A \vee B) \to C$:



3. Tutki semanttisella taululla, pitääkö annettu väittämä paikkansa. Jos ei, anna perusteluksi totuusjakelu, jossa se ei ole tosi (vastaesimerkki).

a) $\{B \to A, C \to B, (C \to A) \to D\} \models D$

b) $\{A \to C, A \vee B, \neg D \to \neg B\} \models C \to D$

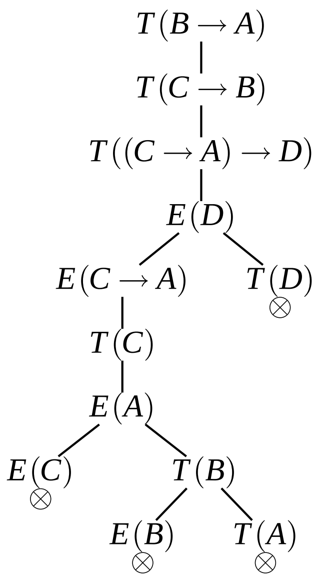
c) $\models (A \to (B \to C)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$

d) $\models (\neg B \to (A \to C)) \to (A \to (B \vee C))$

Ratk.
Loogista seuraavuutta tutkittaessa asetetaan taulun juureen kaikki lausejoukon lauseet totena ja tutkittava lause epätotena. Mikäli nyt kaikki puun haarat sulkeutuvat ristiriidan takia, tiedetään että tutkittava lause ei voi olla

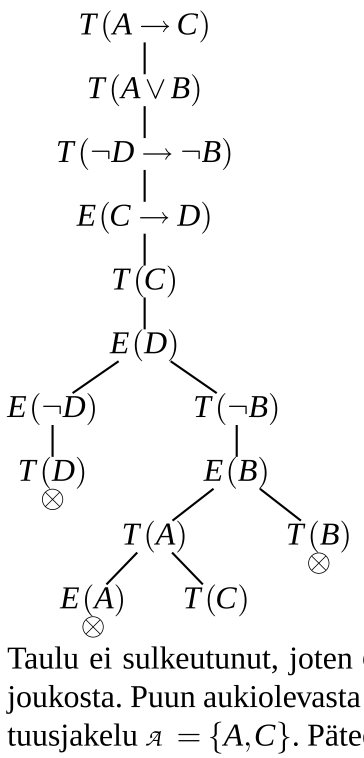
epätosi, mikäli kaikki lausejoukon lauseet ovat tosia, joten lause on looginen seuraavuus lausejoukosta.

a)



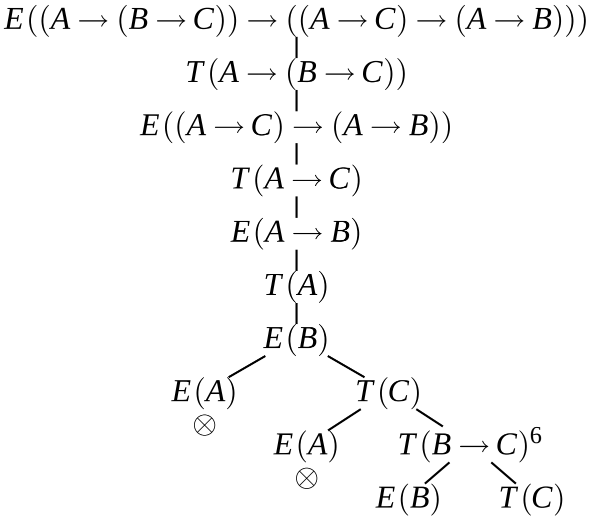
Koska kaikki taulun haarat ovat ristiriitaisia, on D looginen seuraus lausejoukosta.

b)



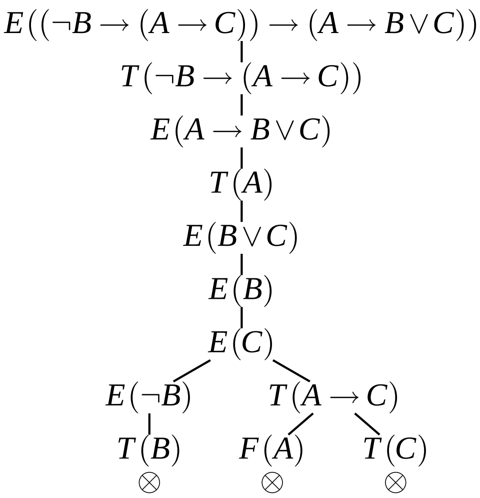
Taulu ei sulkeutunut, joten $C \to D$ ei ole looginen seuraavuus lausejoukosta. Puun aukiolevasta haarasta voidaan lukea vastaesimerkki totuusjakelu $\mathcal{A} = \{A, C\}$. Pätee siis $\mathcal{A} \models A \to C$, $\mathcal{A} \models A \vee B$, $\mathcal{A} \models \neg D \to \neg B$, ja $\mathcal{A} \not\models C \to D$ (tarkista!).

c) **Ratk.** Merkintä $\models \phi$ tarkoittaa siis, että lause ϕ on pätevä. Todistus siis tapahtuu konstruoimalla puu, jonka juuressa on lauseen negaatio.



Koska taulu ei sulkeutunut, lause ei ole pätevä. Vastamalli voidaan lukea avoimesta haarasta, tässä tapauksessa esimerkiksi oikeanpuolimmaisesta (avoimesta) haarasta saadaan totuusjakelu $\mathcal{A} = \{A, C\}$.

d) **Ratk.**



Taulu sulkeutui, joten lause on pätevä.

4. Palataan insinööri Sörsselssönin laatimiin vaatimuksiin liikennevaloille yksisuuntaisten katujen risteyksessä. Osoita semanttisella taululla, että väittämä "liikennevalojen punaiset lamput eivät pala yhtäaikaisesti" seuraa loogisesti laatimastasi lausejoukosta.

Ratk.

$T(P1 \vee K1 \vee V1)$

$T(P1 \rightarrow \neg K1 \wedge \neg V1)$

$T(K1 \rightarrow \neg P1 \wedge \neg V1)$

$T(V1 \rightarrow \neg P1 \wedge \neg K1)$

$T(P2 \vee K2 \vee V2)$

$T(P2 \rightarrow \neg K2 \wedge \neg V2)$

$T(K2 \rightarrow \neg P2 \wedge \neg V2)$

$T(V2 \rightarrow \neg P2 \wedge \neg K2)$

$T(\neg(V1 \wedge V2))$

$T(P1 \rightarrow (K2 \vee V2))$

$T(P2 \rightarrow (K1 \vee V1))$

$E(\neg(P1 \wedge P2))$

$T(P1 \wedge P2)$

$T(P1)$

$T(P2)$

- $E(P1)$ $\otimes$
- $T(K2 \vee V2)$
  - $T(K2)$
    - $E(K2)$ $\otimes$
    - $T(\neg P2 \wedge \neg V2)$, $T(\neg P2)$, $T(\neg V2)$, $E(P2)$ $\otimes$
  - $T(V2)$
    - $E(K2)$
      - $E(V2)$ $\otimes$
      - $T(\neg P2 \wedge \neg K2)$, $T(\neg P2)$, $T(\neg K2)$, $E(P2)$ $\otimes$
    - $T(\neg P2 \wedge \neg V2)$, $T(\neg P2)$, $T(\neg V2)$, $E(P2)$ $\otimes$

5. Osoita Hilbertin ja Suppesin todistusjärjestelmillä (opetusmoniste, kappaleet 5.1 ja 5.2) seuraavat väittämät.

a) $\vdash P \to P$
Ratk. (Hilbert)

1.	$(P \to ((P \to P) \to P))$	[A1] $\alpha = P$, $\beta = P \to P$
2.	$((P \to ((P \to P) \to P)) \to$	
	$((P \to (P \to P)) \to (P \to P)))$	[A2] $\alpha = \gamma = P$, $\beta = P \to P$
3.	$((P \to (P \to P)) \to (P \to P))$	[MP:1,2]
4.	$(P \to (P \to P))$	[A1] $\alpha = P$, $\beta = P$
5.	$(P \to P)$	[MP:3,4]

(Suppes)

1.	P	[apuoletus]
2.	$\neg\neg P$	[KNT]
3.	P	[KNE]
4.	$P \to P$	[ET:1,3]

b) $\{P \to Q, Q \to R\} \vdash P \to R$
Ratk. (Hilbert)

1.	$(Q \to R)$	[P2]
2.	$((Q \to R) \to (P \to (Q \to R)))$	[A1] $\alpha = Q \to R$, $\beta = P$
3.	$(P \to (Q \to R))$	[MP:1,2]
4.	$((P \to (Q \to R)) \to ((P \to Q) \to (P \to R)))$	[A2] $\alpha = P$, $\beta = Q$, $\gamma = R$
5.	$((P \to Q) \to (P \to R))$	[MP:3,4]
6.	$(P \to Q)$	[P1]
7.	$(P \to R)$	[MP:5,6]

(Suppes)

1.	$P \to Q$	[P1]
2.	$Q \to R$	[P2]
3.	P	[apuoletus]
4.	Q	[MP:3,2]
5.	R	[MP:4,3]
6.	$P \to R$	[ET:3,5]

c) $\{P, Q \to (P \to R)\} \vdash Q \to R$

Ratk. (Hilbert)

1.	P	[P1]
2.	$(Q \to (P \to R))$	[P2]
3.	$(P \to (Q \to P))$	[A1] $\alpha = P,\ \beta = Q$
4.	$(Q \to P)$	[MP:1,3]
5.	$((Q \to (P \to R)) \to ((Q \to P) \to (Q \to R)))$	[A2] $\alpha = Q,\ \beta = P,\ \gamma = R$
6.	$((Q \to P) \to (Q \to R))$	[MP:2,5]
7.	$(Q \to R)$	[MP:4,6]

(Suppes)

1.	P	[P1]
2.	$Q \to (P \to R)$	[P2]
3.	$\quad Q$	[apuoletus]
4.	$\quad P \to R$	[MP:3,2]
5.	$\quad R$	[MP:1,4]
6.	$Q \to R$	[ET:3,5]