Some incomplete constraint solvers:

Arithmetic constraints

Krzysztof R. Apt: Principles of Constraint Programming.
Cambrigde University Press, 2003. Pages: 211-227.

Emil Falck

Helsinki University of Technology
Laboratory for Theoretical Computer Science
emil@tcs.hut.fi

Agenda

Agenda

Aritmeettiset rajoitteet kokonaisluvuille

- Lisätään aakkostoon kertolaskusymboli "$\cdot$",
- Akkosto on
  - kaksi vakiota, 0 ja 1,
  - yksipaikkainen miinusmerkki "-",
  - kolme kaksipaikkaista funktiosymbolia "$+$","-","$\cdot$"

Aritmeettiset rajoitteet kokonaisluvuille (2)

- Aritmeettinen lauseke: aakkostostosta muodostettu termi
- Aritmeettinen rajoite: kaava/yhtälö muodossa s op t, missä
  - s ja t ovat aritmeettisia lausekkeita,
  - op $\in \{<, \leq, =, \neq, \geq, >\}$.
- Esimerkki

$$x^5 \cdot y^2 \cdot z^4 + 3x \cdot y^3 \cdot z^5 \leq 10 + 4x^4 \cdot y^6 \cdot z^2 - y^2 \cdot x^5 \cdot z^4$$

Arvojoukkoa rajoittavat säännöt: TAPA 1 (1/4)

- Arvojoukkoina on kokonaislukuvälejä,
- Käytetään samaa menetelmää kuin lineaarisille rajoitteille:

$$< 3x + 4y - 5z \leq 7; x \in [l_x..h_x], y \in [l_y..h_y], z \in [l_z..h_z] >$$

$$\Downarrow$$

$$x \leq \frac{7 - 4y + 5z}{3} \leq \frac{7 - 4l_y + 5h_z}{3}$$

- Ongelma: yhtälöä ei voida aina ratkaista valitulle muuttujalle

Arvojoukkoa rajoittavat säännöt: TAPA 1 (2/4)

- Tarkastellaan rajoitetta $x^3 y - x \leq 40$, $x \in [1..100]$ ja $y \in [1..100]$.
- Ratkaistaan muuttujalle x:

$$x \leq \lfloor \sqrt[3]{\frac{40 + x}{y}} \rfloor$$

- Redusoidaan arvojoukkoa etsimällä ylärajaa:

$$x \leq \lfloor \sqrt[3]{\frac{40 + 100}{1}} = \lfloor \sqrt[3]{140} \rfloor = 5$$

- Sama voidaan tietysti tehdä uudestaan:

$$x \leq \lfloor \sqrt[3]{\frac{40 + 5}{1}} = \sqrt[3]{45} \rfloor = 3$$

Arvojoukkoa rajoittavat säännöt: TAPA 1 (3/4)

- Vastaavasti saadaan muutujalle y

$$y \leq \lfloor \frac{40}{x^3} + \frac{1}{x^2} \rfloor \leq 41$$

- Päädytään (optimaaliseen) arvojoukon reduktioon
  $x \in [1..3]$ ja $y \in [1..41]$

- Menetelmä ei toimi kovin hyvin yleisessä tapauksessa...

Arvojoukkoa rajoittavat säännöt: TAPA 1 (4/4)

- Tarkastellaan rajoitetta

  $2x^5 \cdot y^2 \cdot z^4 - 4x^4 \cdot y^6 \cdot z^2 + 3x \cdot y^3 \cdot z^5 \leq 10$, missä $x, y, z \in [-100..100]$

- Oletetaan että $y, z \neq 0$ ja ratkaistaan muuttujalle x:

$$x \leq \lfloor \sqrt[5]{\frac{5}{y^2 \cdot z^4} + \frac{2x^4 \cdot y^4}{z^2} - \frac{3}{2} x \cdot y \cdot z} \rfloor$$

- Sijoittamalla yhtälöön arvojoukkojen ylärajat saadaan

$$x \leq \lfloor \sqrt[5]{5 + 2 \cdot 100^8 + \frac{3}{2} 100^3} \rfloor \ > 100$$

- Muuttujien arvoalueiden rajoittaminen bisektio menetelmällä ei ratkaise ongelmaa

Arvojoukkoa rajoittavat säännöt: TAPA 2 (1/7)

- Tarkastellaan vain tietynlaisia polynomisia rajoitteita
- Monomi on kokonaisluku tai termi muotoa

$$a \cdot x_1^{n_1} \cdot \ldots x_k^{n_k}, \text{ missä}$$

  - $k > 0$,
  - $x_1, \ldots, x_k$ ovat eriäviä ja järjestetty jonkin (täydellisen) osittaisjärjetyksen $\prec$ mukaisesti,
  - a on nollasta eroava kokonaisluku,
  - $n_1, \ldots, n_k$ ovat positiivisia kokonaislukuja.
- Termiä $x_1^{n_1} \cdot \ldots x_k^{n_k}$ kutsutaan potenssituloksi (eng. power product)

Arvojoukkoa rajoittavat säännöt: TAPA 2 (2/7)

- Polynomi on termi muotoa

$$\sum_{i=1}^{n} m_i, \quad \text{missä}$$

  - $n > 0$,
  - ainakin yksi monomi m_i on kokonaisluku,
  - potenssitulot $m_1, \ldots, m_n$ ovat pareittain eriäviä

- Polynomirajoite on aritmeettinen rajoite muotoa s op b, missä s on polynomi, $op \in \{<, \leq, =, \neq, \geq, >\}$ ja b on kokonaisluku

Arvojoukkoa rajoittavat säännöt: TAPA 2 (3/7)

- Jokainen aritmeettinen rajoite voidaan muuntaa polynomirajoitteeksi

$$x^5 \cdot y^2 \cdot z^4 + 3x \cdot y^3 \cdot z^5 \leq 10 + 4x^4 \cdot y^6 \cdot z^2 - y^2 \cdot x^5 \cdot z^4$$

$$\Downarrow$$

$$2x^5 \cdot y^2 \cdot z^4 - 4x^4 \cdot y^6 \cdot z^2 + 3x \cdot y^3 \cdot z^5 \leq 10$$

Arvojoukkoa rajoittavat säännöt: TAPA 2 (4/7)

- Yksinkertainen polynomirajoite on polynomirajoite s op b, missä s on polynomi, jossa jokainen muuttuja esiintyy korkeintaan kerran.
- Sopivia muuntosääntöjä käyttämällä jokainen polynomirajoite voidaan muuntaa yksinkertaisiksi polynomirajoitteiksi:

$$2x^5 \cdot y^2 \cdot z^4 - 4x^4 \cdot y^6 \cdot z^2 + 3x \cdot y^3 \cdot z^5 \leq 10$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 \leq 10, &\quad 2x^5 \cdot y^2 \cdot z^4 - x_1 = 0 \\ 4x^4 \cdot y^6 \cdot z^2 = 0, &\quad 3x \cdot y^3 \cdot z^5 - x_3 = 0 \end{aligned}$$

Arvojoukkoa rajoittavat säännöt: TAPA 2 (5/7)

- Tarkastellaan rajoiteongelmaa, jossa on yksi aritmeettinen rajoite ϕ ja muuttujien arvojoukot
- Muunnetaan ϕ yksinkertaisiksi polynomirajoitteiksi
- Jokaiselle apumuuttujalle z, joka esiintyy rajoitteessa $t - z = 0$, määrätään arvojoukko $z \in \{t^-..t^+\}$, missä t^- ja t^+ ovat monomille t lasketut ylä- ja alarajat.

Arvojoukkoa rajoittavat säännöt: TAPA 2 (6/7)

- Tarkastellaan rajoitetta $2x^5 \cdot y^2 \cdot z^4 - x_1 = 0$
- Oletetaan että muuttujan x_1 alkuperäinen arvojoukko $[-2 \cdot 100^{11}..2 \cdot 100^{11}]$ on bisektiomenetelmällä rajoitettu välille $[-2 \cdot 100^{11}..2 \cdot h^5]$, missä $h < 100$
- Nyt ehdosta $x \leq \lfloor \sqrt[5]{\frac{x_1}{2y^2 \cdot z^4}} \rfloor$ seuraa: $x \in [-100..h]$

Arvojoukkoa rajoittavat säännöt: TAPA 2 (7/7)

- Yleisessä tapauksessa joudutaan ratkaisemaan monta alatapausta:

$2x^4+3y^3-4z^2 \leq 1000,$ missä $x \in [l_x..h_x], y \in [l_y..h_y], z \in [l_z..h_z]$

- Ratkaistaan muutujalle x:

$$x^4 \leq 500 - \frac{3}{2}y^3 + 2z^2$$

$$y^3 \in [l_y^3..h_y^3]$$

$$z^2 \in \begin{cases} l_z^2..h_z^2 & : \quad l_z \leq 0 \\ h_z^2..l_z^2 & : \quad h_z \leq 0 \\ 0..\max(l_z^2, h_z^2) & : \quad l_z < 0, h_z > 0 \end{cases}$$

Arvojoukkoa rajoittavat säännöt: TAPA 3

- Aritmeettinen rajoite on atominen jos se on
  - lineaarinen rajoite,
  - tai muotoa $x \cdot y = z$.
- Jokainen aritmeettinen rajoite voidaan muuntaa atomisiksi aritmeettisiksi rajoitteiksi
- Esimerkki muuntosäännöstä

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \ op \ b}{\sum_{i=1}^{n} v_i \ op \ b, m_1 = v_1, \ldots, m_n = v_n},$$

missä v_i:t ovat apumuuttujia.

Kokonaislukuvälien tulo

- Olkoon X,Y kokonaislukujoukkoja. Määritellään joukkojen tulo seuraavasti:

$$X \cdot Y := \{x \cdot y \mid x \in X, y \in Y\}$$

- Tulo $X \cdot Y$ välttämättä ole kokonaislukuväli

$$[0..2] \cdot [1..2] = \{0, 1, 2, 4\}$$

- Määritellään joukko-operaatio int:

$$int(X) := \begin{cases} \text{pienin kokonaislukuväli joka sisältää joukon X,} & \text{jos X on äärellinen} \\ \mathcal{Z}, & \text{muuten} \end{cases}$$

$$int([0..2] \cdot [1..2]) = [0..4]$$

Tulosääntö 1

- MULTIPLICATION 1

$$\frac{< x \cdot y = z; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z >}{< x \cdot y = z; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z \cap int(D_x \cdot D_y) >}$$

- Esimerkki:

$$< x \cdot y = z; x \in [0..2], y \in [1..2], z \in [4..6] >$$

$$int([0..2] \cdot [1..2]) = [0..4]$$

$$[4..6] \cap [0..4] = [4..4]$$

$$\Downarrow$$

$$< x \cdot y = z; x \in [0..2], y \in [1..2], z \in [4..4] >$$

Kokonaislukuvälin jakolasku

- Olkoon X,Y kokonaislukujoukkoja. Määritellään joukkojen jakolasku seuraavasti:

$$Z/Y := \{x \in \mathcal{Z} \mid \exists y \in Y, \exists z \in Z \text{ s.e } x \cdot y = z\}$$

- Esimerkki

$$[3..5]/[-1..2] = \{-5, -4, -3, 2, 3, 4, 5\}$$

- Jos $0 \in Z/Y$, niin $Z/Y = \mathcal{Z}$
- Jos $0 \notin Z$, niin $Z/[0..0] = \emptyset$

Tulosäännöt 2 ja 3

- MULTIPLICATION 2

$$\frac{< x \cdot y = z; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z >}{< x \cdot y = z; x \in D_x \cap int(D_z/D_y), y \in D_y, z \in D_z >}$$

- MULTIPLICATION 3

$$\frac{< x \cdot y = z; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z >}{< x \cdot y = z; x \in D_x, y \in D_y \cap int(D_z/D_x), z \in D_z >}$$

Konsistenssi

- bounds- ja interval-konsistenssi ovat hyvin määriteltyjä myös aritmeettisille rajoitteille
- MULTIPLICATION-sääntöjä ei voida karakterisoida interval-konsistenssilla:
  - Tarkastellaan rajoiteongelmaa:

$$< x \cdot y = z; x \in [2..3], y \in [2..3], z \in [5..6] >$$

  - arvolla $z = 5$ ei ongelmalla ole ratkaisua $\Rightarrow$ se ei ole interval-konsistentti
  - rajoiteongelma on suljettu MULTIPLICATION-sääntöjoukon suhteen

Konsistenssi (2)

- MULTIPLICATION-sääntöjä ei voida karakterisoida bounds-konsistenssilla:
  - Tarkastellaan rajoiteongelmaa:

$$< x \cdot y = z; x \in [-2..1], y \in [-3..10], z \in [8..10] >$$

  - arvolla $y = -3$ ei ole sellaisia $a \in [-2, 1]$ ja $c \in [8, 10]$ s.e $a \cdot (-3) = c$

Kokonaislukuväleiltä äärellisiin joukkoihin

- FD-MULTIPLICATION 1

$$\frac{< x \cdot y = z; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z >}{< x \cdot y = z; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z \cap (D_x \cdot D_y) >}$$

- FD-MULTIPLICATION 2

$$\frac{< x \cdot y = z; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z >}{< x \cdot y = z; x \in D_x \cap (D_z / D_y), y \in D_y, z \in D_z >}$$

- FD-MULTIPLICATION 3

$$\frac{< x \cdot y = z; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z >}{< x \cdot y = z; x \in D_x, y \in D_y \cap (D_z / D_x), z \in D_z >}$$

Konsistenssi 2

Lause 6.10 (FD-MULTIPLICATION)
Rajoiteongelma $< x \cdot y = z; x \in D_x, y \in D_y, z \in D_z >$, missä D_x, D_y, D_z ovat äärellisiä kokonaislukujoukkoja on hyperkaarikonsistentti joss se on suljettu FD-MULTIPLICATION -sääntöjoukon suhteen.

Agenda

Aritmeettiset rajoitteet reaaliluvuille

- Aakkosto on
  - kaikki reaaliluvut ovat vakioita
  - yksipaikkainen miinusmerkki “-”,
  - kolme kaksipaikkaista funktiosymbolia “+”,”-”,”$\cdot$”

Aritmeettiset rajoitteet reaaliluvuille (2)

- Aritmeettinen lauseke: aakkostostosta muodostettu termi
- Aritmeettinen rajoite: kaava/yhtälö muodossa s op t, missä
  - s ja t ovat aritmeettisia lausekkeita,
  - op $\in \{<, \leq, =, \neq, \geq, >\}$.
- Esimerkki

$$2.4 \cdot x^5 \cdot y^2 \cdot z^4 + 3.6 \cdot x \cdot y^3 \cdot z^5 \leq 10.1 + 4.2 \cdot x^4 \cdot y^6 \cdot z^2$$

Arvojoukkona täydennetty reaaliakseli

- Täydennetään reaaliakseli seuraavasti:

$$\mathcal{R}^+ := \mathcal{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

- Tarkastellaan välejä

$$< a, b >= \{r \in \mathcal{R} | a \leq r \leq b\}$$

Reaalivälien aritmeettiset operaatiot

Olkoon X,Y reaalivälejä. Määritellään joukko-operaatiot:

- yhteenlasku

$$X + Y := \{x + y | x \in X, y \in Y\}$$

- vähennyslasku

$$X - Y := \{x - y | x \in X, y \in Y\}$$

- kerolasku

$$X \cdot Y := \{x \cdot y | x \in X, y \in Y\}$$

- jakolasku

$$X/Y := \{u \in \mathcal{R}^+ | \exists x \in X, \exists y \in Y u \cdot y = x\}$$

Reaalivälien aritmeettiset operaatiot (2)

Määritellään lisäksi

$$int(X) := \cap\{Y \in \mathcal{I} | X \subseteq Y\},$$

missä $\mathcal{I}$ on täydennettyjen välien joukko.

Intuitiivisesti: $int(A) :=$ pienin täydennetty reaaliväli joka sisältää A:n

Reaalivälien aritmeettiset operaatiot (3)

Huomio 6.11 (Intervals) Olkoon X,Y täydennettyjä reaalivälejä ja r jokin reaaliluku. Tällöin

(i) $X \cap Y$, $X + Y$, $X - Y$ ja $X \cdot Y$ ovat täydennettyjä reaalivälejä.

(ii) $X/\{r\}$ on täydennetty reaaliväli.

(iii) X/Y ei välttämättä ole täydennetty reaaliväli

Agenda