Kotitehtävä 1

Kuinka monta erilaista Gray-koodia voidaan muodostaa 4-bittisten binäärivektoreiden joukosta?

Esitetään koodi järjestettynä jonona koodisanoja siten, että ensimmäinen koodisana on aina 0000, ja peräkkäiset koodisanat eroavat toisistaan täsmälleen yhdessä koordinaatissa. Koodit katsotaan erilaisiksi, jos niitä esittävät jonot poikkeavat toisistaan.

- Kuinka monta erilaista 4-bittisten binäärisanojen Gray-koodia on olemassa?
- Gray-koodi on syklinen, jos sen ensimmäinen ja viimeinen koodisana eroavat toisistaan täsmälleen yhdessä koordinaatissa. Kuinka moni 4-bittisistä Gray-koodeista on syklinen?
- Mikä on leksikografisessa järjestyksessä ensimmäinen 4-bittinen Gray-koodi?

Tehtävä lienee liian työläs käsin ratkaistavaksi. Palautukseen tulee kuulua lyhyt selostus (esim. hyvälaatuisena PostScriptinä tai PDF:nä) käytetystä ratkaisutavasta ja mahdollisten laadittujen tietokoneohjelmien lähdekoodi. Pari johdattelevaa vihjettä: Miten rank- ja unrank-funktioita voitaisiin käyttää ratkaisussa? Olisiko ongelmalla jokin geometrinen tulkinta?

Bonuspisteen tavoittelemiseksi voi esittää ansiokkaita pohdintoja, lisäkokeiluja (esim. vastaava ongelma 5-bittisten sanojen tapauksessa; pelkkä tämän selvittäminen raa'alla laskentateholla tosin tuskin riittää bonuspisteeseen), tai algoritmisia oivalluksia. Seuraavat aiheet ovat jo melko haastavia:

- Syklisen Gray-koodin deltasekvenssi on järjestetty lista $[\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{2^n}]$, missä δ_i ilmaisee, monennessako koordinaatissa koodin i:s ja $i+1$:s $\pmod{2^n}$ koodisana eroavat. Kaksi syklistä Gray-koodia ovat ekvivalentteja, jos niiden deltasekvenssit ovat ekvivalentteja. Kaksi deltasekvenssiä ovat ekvivalentteja, jos toinen saadaan toisesta rotaatiolla $[\delta_1, \ldots, \delta_{2^n}] \to [\delta_i, \delta_{i+1}, \ldots, \delta_{2^n}, \delta_1, \ldots, \delta_{i-1}]$, peilaamalla $[\delta_1, \ldots, \delta_{2^n}] \to [\delta_{2^n}, \delta_{2^n-1}, \ldots, \delta_1]$, permutoimalla koordinaatteja $[\delta_1, \ldots, \delta_{2^n}] \to [\pi(\delta_1), \ldots, \pi(\delta_{2^n})]$, missä π permutoi perusjoukkoa $\{1, 2, 3, 4\}$, tai yhdistelemällä näitä operaatioita. Moneenko ekvivalenssiluokkaan deltasekvenssit (ja siten sykliset Gray-koodit) jakautuvat ja montako koodia kuhunkin ekvivalenssiluokkaan kuuluu?
- Voisiko vastauksen aiempiin kohtiin jotenkin selvittää ilman, että tarvitsee ensin luetteloida kaikki (sykliset) Gray-koodit?

Kotitehtävän palautus assistentille (Emilia Oikarinen, huone TB348, puh. 451 3292, E-mail: Emilia.Oikarinen@hut.fi) viimeistään 16.2.2004. Kotitehtäviin liittyvistä tietokoneohjelmista tulee aina palauttaa listaus sähköisessä muodossa testausta varten.

Erityisen ansiokkaasta ja määräaikaan mennessä palautetusta ratkaisusta voi ansaita tenttiin bonuspisteen.