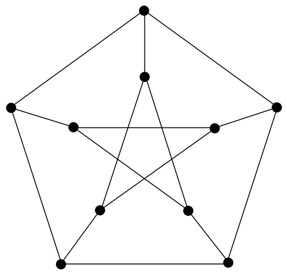
Laskuharjoitus 1

26.1.2004

1. Muodosta allaolevalle *Petersenin graafille* naapuruus- ja insidenssimatriisit.

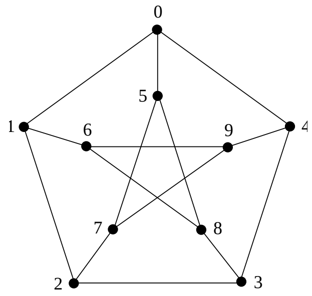


2. Leksikografinen järjestys k-osajoukoille.
   (a) Olkoon $S = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$. Mikä on osajoukon $\{3, 7, 13\}$ sijaluku joukon S kolmialkioisten osajoukkojen lex-järjestyksessä?
   (b) Osoita, että $\mathsf{unrank}_{\text{lex}}(\mathsf{rank}_{\text{lex}}(\{3, 7, 13\})) = \{3, 7, 13\}$.
3. Minimimuutosjärjestys osajoukoille.
   (a) Määritä koodisanan 00101011 rank peilatussa Gray-koodissa (binary reflected Gray code) G^8.
   (b) Määritä järjestyksessä 50. peilatun Gray-koodin G^8 koodisana.
4. Määrittele leksikografiset (= “puhelinluettelojärjestys”) rank- ja unrank-funktiot muotoa
   $$\mathrm{X_1X_2X_3\text{-}Y_1Y_2Y_3}$$
   oleville auton rekisterikilville, missä $\mathrm{X_1, X_2, X_3} \in \{\mathrm{A, B, C, D}, \ldots, \mathrm{Z}\}$ ja $\mathrm{Y_1, Y_2, Y_3} \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Mikä on rekisterikilven IOI-010 rank?

Laskuharjoituksen 1 vastaukset

Tehtävä 1

Nimetään aluksi Petersenin graafin solmut kuten alla.



Tällöin naapuruusmatriisiksi saadaan

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0
3	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
4	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
5	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0
6	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
7	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
8	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0
9	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0

.

(Naapuruusmatriisissa solmua i vastaavalla rivillä on solmua j vastaavassa sarakkeessa alkio 1 jos solmujen i ja j välillä on kaari graafissa; muussa tapauksessa kyseinen alkio on 0.)

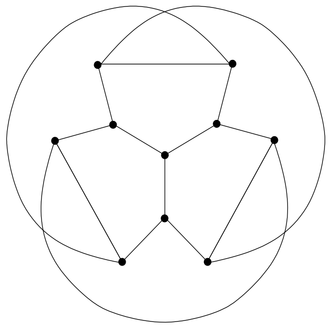
Vastaavasti insidenssimatriisiksi saadaan

	01	12	23	34	40	05	16	27	38	49	57	58	68	69	79
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1

(Insidenssimatriisissa solmua i vastaavalla rivillä on kaarta $\{j,k\}$ vastaavassa sarakkeessa alkio 1 jos $i \in \{j,k\}$; muussa tapauksessa kyseinen alkio on 0.)

Huomaa, että sekä naapuruus- että insidenssimatriisi riippuvat solmujen nimeämistavasta.

Lisätehtävä. Alla on toinen esitystapa Petersenin graafille. Etsi tapa nimetä graafin solmut siten, että tulokseksi saadaan sama naapuruus/insidenssimatriisi kuin edellä. (Ratkaisuja on useampia kuin yksi.)



Tehtävä 2 (a)

Oletetaan joukon S alkiot järjestetyksi normaalisti. Tehtävä voidaan ratkaista muuntamalla ongelma joukon $\{1,2,3,4,5,6\}$ vastaavaksi ongelmaksi ja käyttämällä tälle joukolle soveltuvaa kirjan algoritmia 2.8, tai kirjan lausetta 2.4 ja algoritmia 2.9. Muunnos voidaan tehdä kuvauksella $f : S \to \{1,2,3,4,5,6\}$, joka säilyttää järjestyksen, ts. kaikilla $x, y \in S$ pätee $x < y$ jos ja vain jos $f(x) < f(y)$.

Ainoa tällainen kuvaus saadaan asettamalla $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(5) = 3$, $f(7) = 4$, $f(11) = 5$, $f(13) = 6$. Kuvauksen f avulla joukko $\{3,7,13\} \subset S$ muuntuu joukoksi $f(\{3,7,13\}) = \{2,4,6\}$. (Järjestyksen säilyvyysominaisuuden avulla voidaan osoittaa, että joukon $\{2,4,6\}$ lex-rank joukon $\{1,2,3,4,5,6\}$ 3-osajoukkojen joukossa vastaa joukon $\{3,7,13\}$ lex-rank'ia S:n 3-osajoukkojen joukossa.) Määritetään joukon $\{2,4,6\}$ lex-rank kirjan lauseen 2.4 ja algoritmin 2.9 (colex-rank) avulla. Lauseen 2.4 mukaan joukon $\{1,\ldots,n\}$ k-osajoukon T lex-rank voidaan määrittää k-osajoukon $T' = \{n+1-i : i \in T\}$ colex-rankin avulla seuraavasti:

$$\mathsf{rank}_{\mathrm{lex}}(T) = \binom{n}{k} - 1 - \mathsf{rank}_{\mathrm{colex}}(T').$$

Nyt $n = 6$ ja $k = 3$, $T = \{2,4,6\}$ ja $T' = \{6+1-2, 6+1-4, 6+1-6\} = \{5,3,1\}$. Kirjan algoritmin 2.9 avulla saadaan

$$\mathsf{rank}_{\mathrm{colex}}(\{5,3,1\}) = \binom{5-1}{3+1-1} + \binom{3-1}{3+1-2} + \binom{1-1}{3+1-3} = 4+1+0 = 5,$$

joten lauseen 2.4 perusteella,

$$\mathsf{rank}_{\mathrm{lex}}(\{2,4,6\}) = \binom{6}{3} - 1 - 5 = 20 - 1 - 5 = 14.$$

Tehtävä 2 (b)

Tiedetään siis (a)-kohdan perusteella, että $\mathsf{rank}_{\mathrm{lex}}(\{2,4,6\}) = 14$. $\mathsf{unrank}_{\mathrm{lex}}(14)$ voidaan laskea joko käyttäen algoritmia 2.8 tai käyttäen lausetta 2.4 ja algoritmia 2.10. Käytetään tässä jälkimmäistä tapaa, tällöin $r = 5$, $n = 6$ ja $k = 3$.

Etsitään ensin suurin $x \le 6$, jolla $\binom{x}{3+1-1}$ on pienempi tai yhtäsuuri kuin r. Tämän toteuttaa $x = 4$, sillä $\binom{4}{3+1-1} = 4 \le 5$) ja $\binom{5}{3+1-1} = 10 > 5$). Näin saadaan $t_1 = x + 1 = 5$. Jatketaan algoritmin suoritusta päivitetyllä $r = 5 - \binom{x}{3+1-i} = 1$, saadut arvot on koottu allaolevaan taulukkoon:

i	r	x s.e. $\binom{x}{k+1-i} \le r$	t_i
1	5	4	5
2	1	2	3
3	0	0	1

Näin saadaan $T' = \{5,3,1\}$, mistä lausetta 2.4 käyttäen $T = \{2,4,6\}$. Lopuksi tehdään vielä käänteismuunnos $f^{-1}(\{2,4,6\}) = \{3,7,13\}$ (käänteismuunnos on olemassa, sillä funktio f on bijektio). Näin ollen $\mathsf{unrank}_{\mathrm{lex}}(\mathsf{rank}_{\mathrm{lex}}(\{3,7,13\})) = \{3,7,13\}$.

Tehtävä 3 (a)

Johdetaan aluksi rekursiivinen versio rank-funktiosta peilatulle Gray-koodille G^n. (Ei-rekursiivinen versio on kirjan algoritmi 2.4.) Perustapauksessa $n = 1$ pätee selvästi

$$\mathsf{rank}(0) = 0, \qquad \mathsf{rank}(1) = 1.$$

Tapauksissa $n \geq 2$ pätee koodin G^n rekursiivisen määritelmän perusteella

$$\mathsf{rank}(b_n b_{n-1} \cdots b_1) = \begin{cases} \mathsf{rank}(b_{n-1} \cdots b_1) & \text{jos } b_n = 0; \\ 2^n - 1 - \mathsf{rank}(b_{n-1} \cdots b_1) & \text{jos } b_n = 1. \end{cases}$$

Koodisanan 00101011 rank saadaan nyt rekursion avulla:

$$\begin{aligned} \mathsf{rank}(00101011) &= \mathsf{rank}(0101011) \\ &= \mathsf{rank}(101011) \\ &= 63 - \mathsf{rank}(01011) \\ &= 63 - \mathsf{rank}(1011) \\ &= 63 - (15 - \mathsf{rank}(011)) \\ &= 63 - (15 - \mathsf{rank}(11)) \\ &= 63 - (15 - (3 - \mathsf{rank}(1))) \\ &= 63 - (15 - (3 - 1))) \\ &= 50. \end{aligned}$$

Tehtävä 3 (b)

Olkoon koodiin G^n kuuluvan koodisanan $b_n b_{n-1} \cdots b_1$ rank r_n. Nyt unrank voidaan tehdä tarkastelemalla rekursiivisesti kumpaan G^n:n puoliskoon (0-alkuiset koodisanat / 1-alkuiset koodisanat) koodisana kuuluu:

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{jos } r_n < 2^{n-1}; \\ 1 & \text{jos } r_n \geq 2^{n-1}, \end{cases} \qquad r_{n-1} = \begin{cases} r_n & \text{jos } r_n < 2^{n-1}; \\ 2^n - 1 - r_n & \text{jos } r_n \geq 2^{n-1}. \end{cases}$$

Tehtävässä on annettu $r_8 = 49$. Edellistä soveltamalla saadaan

n	r_n	2^{n-1}	b_n
8	49	128	0
7	49	64	0
6	49	32	1
5	14	16	0
4	14	8	1
3	1	4	0
2	1	2	0
1	1	1	1

.

Joten $\mathsf{unrank}(49) = 00101001$. (Vaihtoehtoisesti tehtävä voidaan ratkaista kirjan algoritmilla 2.5.)

Tehtävä 4

Samaistetaan aluksi aakkosten kirjaimet A, B, C, …, Z lukujen $0, 1, \ldots, 25$ kanssa:

$$\text{A} \triangleq 0, \quad \text{B} \triangleq 1, \quad \text{C} \triangleq 2, \quad \cdots \quad \text{Y} \triangleq 24, \quad \text{Z} \triangleq 25.$$

Tarkastellaan rekisterikilpiä muotoa $[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ olevina listoina, missä $z_1, z_2, z_3 \in \{0, 1, \ldots, 25\}$ ja $z_4, z_5, z_6 \in \{0, 1, \ldots, 10\}$. Tällöin esimerkiksi kilpeä IOI-010 vastaa lista $[8, 14, 8, 0, 1, 0]$.

Tavanomainen leksikografinen järjestys rekisterikilpien välillä määräytyy nyt ehdosta $[z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6] < [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ jos ja vain jos on olemassa $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ s.e. $z'_j < z_j$ ja kaikilla $i \in \{1, \ldots, j-1\}$ pätee $z'_i = z_i$.

Rakennetaan aluksi rank-funktio. Kilven $[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$ leksikografinen rank on niiden kilpien $[z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6]$ lukumäärä, joille pätee $[z'_1, z'_2, z'_3, z'_4, z'_5, z'_6] < [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$. Tällaiset kilvet voidaan jakaa alitapauksiin j:n arvon (ks. leksikografisen järjestyksen määritelmä yllä) perusteella. Erityisesti z'_j voidaan valita z_j tavalla siten, että $z'_j < z_j$. Tämän jälkeen arvot z'_k, missä $k > j$, voidaan valita mielivaltaisesti. Näin ollen saadaan

$$\begin{aligned} \mathsf{rank}([z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]) = z_1 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\ + z_2 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\ + z_3 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\ + z_4 \cdot 10 \cdot 10 + \\ + z_5 \cdot 10 + \\ + z_6. \end{aligned}$$

Eli lyhyemmin

$$\mathsf{rank}([z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]) = \sum_{j=1}^{6} (z_j \prod_{k=j+1}^{6} B_k)$$

jos asetetaan $B_1 = B_2 = B_3 = 26$ ja $B_4 = B_5 = B_6 = 10$. (Tapauksessa $j = 6$ määritellään lisäksi $\prod_{k=j+1}^{6} B_k = 1$.)
Kilvelle IOI-010 saadaan nyt

$$\begin{aligned}\mathsf{rank}([8, 14, 8, 0, 1, 0]) &= 8 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\ &\quad + 14 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\ &\quad + 8 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 + \\ &\quad + 0 \cdot 10 \cdot 10 + \\ &\quad + 1 \cdot 10 + \\ &\quad + 0 \\ &= 5780010.\end{aligned}$$

Unrank voidaan tehdä seuraavalla algoritmilla:

1. Asetetaan $n_6 \stackrel{\text{def}}{=} \mathsf{rank}([z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6])$.
2. Toistetaan kaikille $i = 6, 5, \ldots, 1$.
   (a) Määritetään jakojäännös $z_i = n_i \mod B_i$.
   (b) Asetetaan $n_{i-1} = (n_i - z_i)/B_i$.
3. Palautetaan tulos $\mathsf{unrank}(n_6) = [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$.

Esimerkiksi

i	n_i	B_i	z_i
6	5780010	10	0
5	578001	10	1
4	57800	10	0
3	5780	26	8
2	222	26	14
1	8	26	8

,

joten $\mathsf{unrank}(5780010) = [8, 14, 8, 0, 1, 0]$ kuten pitääkin.

Kotitehtävä 1

Kuinka monta erilaista Gray-koodia voidaan muodostaa 4-bittisten binäärivektoreiden joukosta?

Esitetään koodi järjestettynä jonona koodisanoja siten, että ensimmäinen koodisana on aina 0000, ja peräkkäiset koodisanat eroavat toisistaan täsmälleen yhdessä koordinaatissa. Koodit katsotaan erilaisiksi, jos niitä esittävät jonot poikkeavat toisistaan.

- Kuinka monta erilaista 4-bittisten binäärisanojen Gray-koodia on olemassa?
- Gray-koodi on syklinen, jos sen ensimmäinen ja viimeinen koodisana eroavat toisistaan täsmälleen yhdessä koordinaatissa. Kuinka moni 4-bittisistä Gray-koodeista on syklinen?
- Mikä on leksikografisessa järjestyksessä ensimmäinen 4-bittinen Gray-koodi?

Tehtävä lienee liian työläs käsin ratkaistavaksi. Palautukseen tulee kuulua lyhyt selostus (esim. hyvälaatuisena PostScriptinä tai PDF:nä) käytetystä ratkaisutavasta ja mahdollisten laadittujen tietokoneohjelmien lähdekoodi. Pari johdattelevaa vihjettä: Miten rank- ja unrank-funktioita voitaisiin käyttää ratkaisussa? Olisiko ongelmalla jokin geometrinen tulkinta?

Bonuspisteen tavoittelemiseksi voi esittää ansiokkaita pohdintoja, lisäkokeiluja (esim. vastaava ongelma 5-bittisten sanojen tapauksessa; pelkkä tämän selvittäminen raa'alla laskentateholla tosin tuskin riittää bonuspisteeseen), tai algoritmisia oivalluksia. Seuraavat aiheet ovat jo melko haastavia:

- Syklisen Gray-koodin deltasekvenssi on järjestetty lista $[\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{2^n}]$, missä δ_i ilmaisee, monennessako koordinaatissa koodin i:s ja $i+1$:s $\pmod{2^n}$ koodisana eroavat. Kaksi syklistä Gray-koodia ovat ekvivalentteja, jos niiden deltasekvenssit ovat ekvivalentteja. Kaksi deltasekvenssiä ovat ekvivalentteja, jos toinen saadaan toisesta rotaatiolla $[\delta_1, \ldots, \delta_{2^n}] \to [\delta_i, \delta_{i+1}, \ldots, \delta_{2^n}, \delta_1, \ldots, \delta_{i-1}]$, peilaamalla $[\delta_1, \ldots, \delta_{2^n}] \to [\delta_{2^n}, \delta_{2^n-1}, \ldots, \delta_1]$, permutoimalla koordinaatteja $[\delta_1, \ldots, \delta_{2^n}] \to [\pi(\delta_1), \ldots, \pi(\delta_{2^n})]$, missä π permutoi perusjoukkoa $\{1, 2, 3, 4\}$, tai yhdistelemällä näitä operaatioita. Moneenko ekvivalenssiluokkaan deltasekvenssit (ja siten sykliset Gray-koodit) jakautuvat ja montako koodia kuhunkin ekvivalenssiluokkaan kuuluu?
- Voisiko vastauksen aiempiin kohtiin jotenkin selvittää ilman, että tarvitsee ensin luetteloida kaikki (sykliset) Gray-koodit?

Kotitehtävän palautus assistentille (Emilia Oikarinen, huone TB348, puh. 451 3292, E-mail: Emilia.Oikarinen@hut.fi) viimeistään 16.2.2004. Kotitehtäviin liittyvistä tietokoneohjelmista tulee aina palauttaa listaus sähköisessä muodossa testausta varten.

Erityisen ansiokkaasta ja määräaikaan mennessä palautetusta ratkaisusta voi ansaita tenttiin bonuspisteen.

Laskuharjoitus 2

2.2.2004

1. Permutaation sykli- ja listaesitykset.
   (a) Esitä permutaatio $\pi_1 = [2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ pistevieraiden syklien tulona.
   (b) Esitä permutaatio $\pi_2 = (1, 5, 6)(2, 4, 3)(7)$ listana.
   (c) Määritä käänteispermutaatiot π_1^{-1} ja π_2^{-1}.
   (d) Määritä tulot $\pi_1\pi_2$ ja $\pi_2\pi_1$.
2. Oletetaan, että $p, q, r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_l$, missä $k, l \geq 0$, ovat toisistaan poikkeavia alkioita. Sievennä seuraavat syklien tuloina annetut permutaatiot pistevieraiden syklien tuloiksi:
   (a) $(p, q)(p, r_1, \ldots, r_k, q, s_1, \ldots, s_l)$
   (b) $(p, q)(p, r_1, \ldots, r_k)(q, s_1, \ldots, s_l)$
3. Permutaatio π on *parillinen* jos se voidaan esittää parillisen määrän transpositioita tulona. Vastaavasti π on *pariton* jos se voidaan esittää parittoman määrän transpositioita tulona.

   Osoita, että jokainen permutaatio on joko pariton tai parillinen.
4. Määritä permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ rank ja seuraaja sekä leksikografisessa että Trotter-Johnson -järjestyksessä.

Laskuharjoituksen 2 vastaukset

Kerrataan aluksi muutamia permutaatioihin liittyviä määritelmiä. Olkoon X äärellinen ei-tyhjä joukko.

- Joukon X permutaatio σ on *r-sykli* jos on olemassa alkiot $a_1, \ldots, a_r \in X$ siten, että
$$\sigma(a_1) = a_2, \quad \sigma(a_2) = a_3, \quad \ldots, \sigma(a_{r-1}) = a_r, \quad \sigma(a_r) = a_1,$$
ja $\sigma(a) = a$ kaikilla $a \in X \setminus \{a_1, \ldots, a_r\}$. Edellinen r-sykli on tapana kirjoittaa $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Sama sykli voidaan tällä tavoin esittää useammalla tavalla, koska syklin alkupiste on mielivaltainen; esim. $(a_2, a_3, \ldots, a_r, a_1) = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$.
- *Transpositio* on mielivaltainen joukon X 2-sykli.
- Joukon X permutaatiot σ_1, σ_2 ovat *pistevieraat* jos millään $x \in X$ ei päde sekä $\sigma_1(x) \neq x$ että $\sigma_2(x) \neq x$.
- Joukon X permutaatioiden π_1, π_2 *tulo* $\pi_1\pi_2$ määritellään kaikille $x \in X$ säännöstä $\pi_1\pi_2(x) = \pi_1 \circ \pi_2(x) = \pi_1(\pi_2(x))$.
- Joukon X permutaation π käänteispermutaatio π^{-1} on joukon X permutaatio, jolle pätee $\pi\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = \iota$, missä ι on identiteetti eli $\iota(x) = x$, kaikilla $x \in X$.
- Jokainen joukon X permutaatio voidaan esittää (syklien järjestystä vaille) yksikäsitteisesti pistevieraiden syklien tulona, jossa jokainen $x \in X$ esiintyy täsmälleen yhdellä syklillä.

Tehtävä 1 (a)

Permutaation π_1 listaesityksestä $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ nähdään, että
$$\pi_1(1) = 2, \quad \pi_1(2) = 4, \quad \pi_1(4) = 7, \quad \pi_1(7) = 1,$$
joten alkion 1 sisältävä sykli on $(1, 2, 4, 7)$. Pienin joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ alkio joka ei ole tällä syklillä on 3. Alkion 3 sisältävä sykli on $(3, 6)$, koska
$$\pi_1(3) = 6, \quad \pi_1(6) = 3.$$
Pienin alkio joka ei ole edellisillä sykleillä on 5, jolle pätee $\pi_1(5) = 5$. Nyt kaikki joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ alkioiden syklit on käyty läpi, joten saadaan
$$\pi_1 = (1, 2, 4, 7)(3, 6)(5).$$

Tehtävä 1 (b)

Sykliesityksestä $\pi_2 = (1, 5, 6)(2, 4, 3)(7)$ nähdään
$$\pi_2(1) = 5, \quad \pi_2(2) = 4, \quad \pi_2(3) = 2, \quad \pi_2(4) = 3,$$
$$\pi_2(5) = 6, \quad \pi_2(6) = 1, \quad \pi_2(7) = 7,$$
joten $\pi_2 = [5, 4, 2, 3, 6, 1, 7]$.

Tehtävä 1 (c)

Permutaation käänteispermutaatio muodostetaan helposti sen sykliesityksestä kääntämällä sekä syklien, että syklien alkioiden järjestys päinvastaiseksi. Esimerkiksi
$$\pi_1^{-1} = (5)(6, 3)(7, 4, 2, 1), \qquad \pi_2^{-1} = (7)(3, 4, 2)(6, 5, 1).$$

Tehtävä 1 (d)

Tulo $\pi_1\pi_2$ on sykliesityksien avulla
$$\pi_1\pi_2 = (1, 2, 4, 7)(3, 6)(5)(1, 5, 6)(2, 4, 3)(7),$$
joka voidaan sieventää muotoon
$$\pi_1\pi_2 = (1, 5, 3, 4, 6, 2, 7)$$
määrittämällä jokaisen alkion kuva. Määritettäessä alkion kuvaa syklien tulossa syklejä luetaan järjestyksessä *oikealta vasemmalle*. Esimerkiksi edellisessä tulossa sykli (7) pitää alkion 1 paikallaan, kuten myös (2,4,3). Sykli $(1, 5, 6)$ kuvaa alkion 1 alkiolle 5. Sykli (5) pitää alkion 5 paikallaan, kuten myös syklit $(3, 6)$ ja $(1, 2, 4, 7)$. Näin ollen $\pi_1\pi_2(1) = 5$.

Vastaavasti, tulo $\pi_2\pi_1$ on sykliesityksien avulla
$$\pi_2\pi_1 = (1, 5, 6)(2, 4, 3)(7)(1, 2, 4, 7)(3, 6)(5),$$
joka voidaan sieventää muotoon
$$\pi_2\pi_1 = (1, 4, 7, 5, 6, 2, 3)$$
määrittämällä jokaisen alkion kuva. Huomaa, että permutaatioiden yhdistäminen (tulo) ei ole kommutatiivinen laskutoimitus, toisin sanoen $\pi_1\pi_2 \neq \pi_2\pi_1$.

Tehtävä 2

Tehtävän tulot ovat sievennetyssä muodossa

$$(p,q)(p,r_1,\ldots,r_k,q,s_1,\ldots,s_l) = (p,r_1,\ldots,r_k)(q,s_1,\ldots,s_l)$$

ja

$$(p,q)(p,r_1,\ldots,r_k)(q,s_1,\ldots,s_l) = (p,r_1,\ldots,r_k,q,s_1,\ldots,s_l).$$

Näin ollen transpositiolla vasemmalta kertominen joko "leikkaa" syklin kahtia, tai "yhdistää" kaksi pistevierasta sykliä.

Edellisestä huomataan että jos mielivaltainen permutaatio π kerrotaan vasemmalta transpositiolla (p,q), niin tällöin permutaatiossa $(p,q)\pi$ on joko yksi sykli enemmän (a-kohta) kuin permutaatiossa π, tai yksi sykli vähemmän (b-kohta).

Tehtävä 3

Jokainen joukon $\{1,\ldots,n\}$ permutaatio π voidaan esittää järjestystä vaille yksikäsitteisesti pistevieraiden syklien tulona:

$$\pi = (a_{1,1},a_{1,2},\ldots,a_{1,m_1})\cdots(a_{k,1},a_{k,2},\ldots,a_{k,m_k}),$$

missä $k \geq 1$ ja $m_j \geq 1$ kaikilla $j = 1,\ldots k$. Sykli $(a_{j,1},\ldots,a_{j,m_j})$ voidaan esittää $m_j - 1$:n transposition tulona, esimerkiksi

$$(a_{j,1},a_{j,2})(a_{j,2},a_{j,3})\cdots(a_{j,m_j-2},a_{j,m_j-1})(a_{j,m_j-1},a_{j,m_j}).$$

Olkoon $\lambda(\pi)$ transpositioiden lukumäärä esitettäessä permutaatio π transpositioiden tulona. Mielivaltaiselle joukon $\{1,\ldots,n\}$ permutaatiolle π pätee siis

$$\lambda(\pi) = \sum_{j=1}^{k}(m_j - 1),$$

missä k on permutaation pistevieraiden syklien lukumäärä ja $m_1,\ldots,m_k$ niiden pituudet. Kuvaus λ on hyvin määritelty, koska arvo $\lambda(\pi)$ ei riipu syklien esitysjärjestyksestä.

Tarkastellaan miten π:n kertominen mielivaltaisella transpositiolla (x,y) vaikuttaa λ:n arvoon. Tarkastelu jakautuu kahteen tapaukseen kuten tehtävässä 2:

(i) x ja y kuuluvat samaan permutaation π sykliin $(a_{j,1},\ldots,a_{j,m_j})$ eli $x = a_{j,p}$ ja $y = a_{j,q}$ joillakin $p < q$. Tällöin sykli $(a_{j,1},\ldots,a_{j,m_j})$ jakautuu permutaatiossa $(x,y)\pi$ kahdeksi pistevieraaksi sykliksi $(a_{j,1},\ldots,a_{j,p-1},a_{j,q},\ldots,a_{j,m_j})$ ja $(a_{j,p},\ldots,a_{j,q-1})$, muut π:n syklit eivät muutu. Näin ollen $\lambda((x,y)\pi) = \lambda(\pi) - (m_j - 1) + (m_j - (q-p) - 1) + (q - p - 1) = \lambda(\pi) - 1$, sillä ensimmäisen uuden syklin pituus on $m_j - (q-p)$ ja toisen $q - p$.

(ii) x ja y kuuluvat eri sykleihin $(a_{j,1},\ldots,a_{j,m_j})$ ja $(a_{l,1},\ldots,a_{l,m_l})$ ja oletetaan, että $x = a_{j,1}$ ja $y = a_{l,1}$. Tällöin permutaatiossa $(x,y)\pi$ on edellä olevien syklien sijasta sykli $(a_{j,1},\ldots,a_{j,m_j},a_{l,1},\ldots,a_{l,m_l})$ ja muut syklit säilyvät muuttumattomina. Näin ollen $\lambda((x,y)\pi) = \lambda(\pi) - (m_j - 1) - (m_l - 1) + (m_j + m_l - 1) = \lambda(\pi) + 1$.

Näin ollen $\lambda((x,y)\pi) \equiv (\lambda(\pi) + 1) \mod 2$.

Lopuksi oletetaan, että mielivaltainen joukon $\{1,\ldots,n\}$ permutaatio τ on esitettävissä kahdella eri tavalla transpositioiden tulona: $\tau = (x_1,y_1)\cdots(x_m,y_m)$ ja $\tau = (x'_1,y'_1)\cdots(x'_{m'},y'_{m'})$. Koska

$$\begin{aligned}\lambda(\tau) &= \lambda((x_2,y_2)\cdots(x_m,y_m)) + 1 = \ldots \\ &= m - 1 + \lambda((x_m,y_m)) = m \pmod 2\end{aligned}$$

ja toisaalta

$$\lambda(\tau) = \lambda((x'_2,y'_2)\cdots(x'_{m'},y'_{m'})) + 1 = \ldots = m' \pmod 2,$$

pätee, että joko m ja m' ovat molemmat parillisia tai molemmat parittomia.

Tehtävä 4

Tarkastellaan ensin leksikografista järjestystä. Permutaation

$$\pi = [\pi(1),\pi(2),\ldots,\pi(n)]$$

leksikografinen seuraaja määritetään seuraavasti:

1. Etsitään suurin $j \in \{1,\ldots,n-1\}$, jolle pätee $\pi(j) < \pi(j+1)$. Jos tällaista ei ole olemassa, kyseessä on leksikografisessa järjestyksessä viimeinen permutaatio $[n,n-1,\ldots,1]$, jolla ei ole seuraajaa.

   Permutaatiolle $[2,4,6,7,5,3,1]$ on $j = 3$.

2. Etsitään alkioista $\pi(j+1),\ldots,\pi(n)$ pienin alkio, joka on suurempi kuin $\pi(j)$.

   Permutaatiolle $[2,4,6,7,5,3,1]$ tämä alkio on 7.

3. Vaihdetaan edellisessä kohdassa valittu alkio ja $\pi(j)$ keskenään. Tulokseksi saadaan permutaatio π'.

   Permutaation $[2,4,6,7,5,3,1]$ tapauksessa pätee $\pi' = [2,4,7,6,5,3,1]$.

4. Järjestetään alkiot $\pi'(j+1),\ldots,\pi'(n)$ kasvavaan järjestykseen (koska alkiot ovat valmiiksi laskevassa järjestyksessä, riittää kääntää niiden järjestys). Tuloksena saadaan π:n leksikografinen seuraajapermutaatio.

   Permutaation $[2,4,6,7,5,3,1]$ tapauksessa seuraaja on $[2,4,7,1,3,5,6]$.

Permutaation $\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)]$ leksikografinen rank määritetään rekursiivisesti:

1. Perustapaus $n = 1$: $\mathsf{rank}(\pi) = 0$.
2. Yleinen tapaus $n \geq 2$:

$$\mathsf{rank}(\pi) = (\pi(1) - 1)(n-1)! + \mathsf{rank}(\pi'),$$

missä

$$\pi'(j) = \begin{cases} \pi(j+1) & \text{jos } \pi(j+1) < \pi(1); \\ \pi(j+1) - 1 & \text{jos } \pi(j+1) > \pi(1). \end{cases}$$

Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ rank on edellisen perusteella

$$\begin{aligned}
&\mathsf{rank}([2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]) = \\
&= (2-1)6! + \mathsf{rank}([3, 5, 6, 4, 2, 1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + \mathsf{rank}([4, 5, 3, 2, 1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + \mathsf{rank}([4, 3, 2, 1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + (4-1)3! + \mathsf{rank}([3, 2, 1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + (4-1)3! + (3-1)2! + \mathsf{rank}([2, 1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + (4-1)3! + (3-1)2! + (2-1)1! \\
&= 1 \cdot 6! + 2 \cdot 5! + 3 \cdot 4! + 3 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! \\
&= 1055.
\end{aligned}$$

Siirrytään nyt Trotter-Johnson järjestykseen. Trotter-Johnson järjestyksessä permutaation

$$\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)]$$

seuraaja määritetään:

1. Etsitään $j \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että $\pi(j) = n$.

   Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa $\pi(4) = 7$.

2. Määritetään, onko permutaatio $\pi' = [\pi(1), \ldots, \pi(j-1), \pi(j+1), \ldots, \pi(n)]$ parillinen vai pariton.

   Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa

   $$\pi' = [2, 4, 6, 5, 3, 1] = (1, 2, 4, 5, 3, 6) = (1, 2)(2, 4)(4, 5)(5, 3)(3, 6)$$

   on pariton.

3. Jos π' on parillinen ja $j > 1$: permutaation π seuraaja saadaan vaihtamalla alkiot $\pi(j-1)$ ja $\pi(j)$ keskenään.
4. Jos π' on parillinen ja $j = 1$: permutaation π seuraaja on

   $$[n, \pi''(1), \pi''(2), \ldots, \pi''(n-1)],$$

   missä π'' on permutaation π' Trotter-Johnson seuraaja.
5. Jos π' on pariton ja $j < n$: permutaation π seuraaja saadaan vaihtamalla alkiot $\pi(j)$ ja $\pi(j+1)$ keskenään.

   Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa Trotter-Johnson seuraaja on näin ollen $[2, 4, 6, 5, 7, 3, 1]$.
6. Jos π' on pariton ja $j = n$: permutaation π seuraaja on

   $$[\pi''(1), \pi''(2), \ldots, \pi''(n-1), n],$$

   missä π'' on permutaation π' Trotter-Johnson seuraaja.

Permutaation π Trotter-Johnson rank lasketaan rekursiivisesti:

1. Perustapaus $n = 1$: $\mathsf{rank}(\pi) = 0$.
2. Etsitään $j \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että $\pi(j) = n$.
3. Määritetään rekursiivisesti permutaation

   $$\pi' = [\pi(1), \ldots, \pi(j-1), \pi(j+1), \ldots, \pi(n)]$$

   rank.
4. Jos $\mathsf{rank}(\pi')$ on parillinen, asetetaan

   $$\mathsf{rank}(\pi) = n\mathsf{rank}(\pi') + n - j.$$
5. Jos $\mathsf{rank}(\pi')$ on pariton, asetetaan

   $$\mathsf{rank}(\pi) = n\mathsf{rank}(\pi') + j - 1.$$

Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa:

n	π	j	$\mathsf{rank}(\pi)$
1	$[1]$	1	0
2	$[2, 1]$	1	$2 \cdot 0 + (2-1) = 1$
3	$[2, 3, 1]$	2	$3 \cdot 1 + (2-1) = 4$
4	$[2, 4, 3, 1]$	2	$4 \cdot 4 + (4-2) = 18$
5	$[2, 4, 5, 3, 1]$	3	$5 \cdot 18 + (5-3) = 92$
6	$[2, 4, 6, 5, 3, 1]$	3	$6 \cdot 92 + (6-3) = 555$
7	$[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$	4	$7 \cdot 555 + (4-1) = 3888$

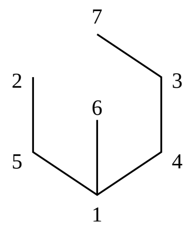
Laskuharjoitus 3

9.2.2004

1. Määritä osituksen $1+3+4+6+6+8$ rsf-lex rank ja seuraaja.

2. Kuinka monella tavalla 20 henkilöä voidaan jakaa viiteen ryhmään, jos vaaditaan, että mitkään kaksi ryhmää eivät ole saman kokoisia. (Huomaa, että ryhmä voi olla myös tyhjä.)

3. (a) Anna alla olevan nimetyn puun Prüferin listaesitys.



   (b) Minkä nimetyn puun Prüferin listaesitys on $[5,5,4,3,2]$?

4. Neljän termin tulo $abcd$ voidaan ryhmitellä kahden termin tuloiksi viidellä erilaisella tavalla:

$$((ab)c)d, \quad (a(bc))d, \quad a((bc)d), \quad a(b(cd)), \quad (ab)(cd).$$

   Yleisessä tapauksessa tulossa on $n+1$ termiä. Esitä bijektio erilaisten kahden termin tuloiksi ryhmittelyjen ja Catalanin perheen C_n välille. (Vihje: jokainen ryhmittely voidaan esittää binääripuuna, jonka lehdet koostuvat tulon termeistä.)

Laskuharjoituksen 3 vastaukset

Tehtävä 1

Ositus $1+3+4+6+6+8$ on käänteisessä standardimuodossa (reverse standard form); standardimuoto on $8+6+6+4+3+1$. Rsf-lex rank on leksikografinen rank osituksien listaesityksille käänteisessä standardimuodossa. Osituksen rsf-rank voidaan laskea seuraavan rekursion (kirjan s. 76) avulla: Oletetaan, että rankattava ositus on standardimuodossa $[a_1,\ldots,a_n]$, missä $a_1 \geq \cdots \geq a_n$. Rekursion perustapauksessa $n=1$ on aina $\mathsf{rank}([a_1]) = 0$. Tapauksessa $n>1$ rekursioaskel on

$$\mathsf{rank}([a_1,\ldots,a_n]) = \begin{cases} \mathsf{rank}([a_1,\ldots,a_{n-1}]) & \text{jos } a_n = 1 \\ \mathsf{rank}([a'_1,\ldots,a'_n]) + P(m-1,n-1) & \text{jos } a_n > 1, \end{cases}$$

missä $a'_j = a_j - 1$ kaikilla $1 \leq j \leq n$ ja $m = \sum_{i=1}^n a_i$. Soveltamalla rekursioyhtälöä saadaan

$$\mathsf{rank}([8,6,6,4,3,1]) = \mathsf{rank}([8,6,6,4,3]) = \mathsf{rank}([7,5,5,3,2]) + P(27-1,5-1),$$

josta edelleen

$$\begin{aligned} \mathsf{rank}([7,5,5,3,2]) &= \mathsf{rank}([6,4,4,2,1]) + P(22-1,5-1) \\ &= \mathsf{rank}([6,4,4,2]) + P(21,4), \\ \mathsf{rank}([6,4,4,2]) &= \mathsf{rank}([5,3,3,1]) + P(16-1,4-1) \\ &= \mathsf{rank}([5,3,3]) + P(15,3), \\ \mathsf{rank}([5,3,3]) &= \mathsf{rank}([4,2,2]) + P(11-1,3-1), \\ \mathsf{rank}([4,2,2]) &= \mathsf{rank}([3,1,1]) + P(8-1,3-1) \\ &= \mathsf{rank}([3]) + P(7,2) = P(7,2). \end{aligned}$$

Yhdistämällä saadaan:

$$\begin{aligned} \mathsf{rank}([8,6,6,4,3,1]) &= P(26,4) + P(21,4) + P(15,3) + P(10,2) + P(7,2) \\ &= 136 + 72 + 19 + 5 + 3 = 235. \end{aligned}$$

Seuraajan etsiminen (standardimuotoiselle ositukselle):

1. Etsitään listan ensimmäinen osalista joka ei ole jaettu tasan, eli pienin i, jolle $a_1 > a_i + 1$,
2. kasvatetaan a_i:tä yhdellä ja asetetaan $a_2,\ldots,a_{i-1}$ minimiarvoonsa ($= a_i$),
3. täsmätään summa asettamalla $a_1 = m - \sum_{i=2}^n a_i$.

Eli $[8,6,6,4,3,1]$:lle $i=2$. Asetetaan $a_2 = a_2 + 1 = 7$. Lopuksi $a_1 = 28 - 7 - 6 - 4 - 3 - 1 = 7$, jolloin saadaan ositus $[7,7,6,4,3,1]$.

Tehtävä 2

Oletetaan aluksi, että ryhmäjaot voidaan tehdä mielivaltaisesti. Jos viidestä ryhmästä $0 \leq k \leq 4$ jätetään tyhjäksi, jaetaan henkilöt jäljellä oleviin $5-k$ ryhmään. Numeroidaan ei-tyhjät ryhmät $1, \ldots, 5-k$, ja merkitään a_j:llä ryhmään j kuuluvien henkilöiden lukumäärää. Nyt on selvästi $a_j \geq 1$ kaikilla $j = 1, \ldots, 5-k$, ja toisaalta $\sum_{j=1}^{5-k} a_j = 20$. Näin ollen joukko $\{(a_1, \ldots, a_{5-k}) \ : \ a_j \geq 1 \text{ ja } \sum_{j=1}^{5-k} a_j = 20\}$ käsittää kaikki mahdolliset tavat jakaa 20 henkilöä *numeroituihin* ryhmiin. Koska ryhmät eivät ole numeroituja, lasketaan tällöin kuitenkin tietty osuus asetelmia useampaan kertaan; esimerkiksi asetelmat $(1,1,1,1,16)$ ja $(16,1,1,1,1)$ tapauksessa $k=0$ ovat samanlaisia. Samanlaisten asetelmien kertautuminen voidaan välttää vaatimalla lisäksi $a_1 \leq \cdots \leq a_{5-k}$. Tällöin huomataan, että joukon

$$\mathcal{P}(20, 5-k) := \{(a_1, \ldots, a_{5-k}) \ : \ 1 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{5-k} \text{ ja } \sum_{j=1}^{5-k} a_j = 20\}$$

alkiot vastaavat itse asiassa luvun 20 erilaisia osituksia $5-k$ osaan, joten joukossa on $P(20, 5-k)$ erilaista asetelmaa. Näin ollen erilaisia asetelmia on kaiken kaikkiaan

$$\sum_{k=0}^{4} P(20, 5-k) = P(20,5) + P(20,4) + \cdots + P(20,1) = 192.$$

Kielletään nyt sellaiset asetelmat, joissa jotkin kaksi ryhmää ovat saman kokoisia. Tässä tapauksessa selvästi enintään yksi ryhmä voidaan jättää tyhjäksi. Olkoon $0 \leq k \leq 1$ tyhjien ryhmien lukumäärä. Jäljellä olevat $5-k$ ryhmää tulisi nyt täyttää siten, että missään kahdessa ryhmässä ei ole samaa määrää jäseniä. Tämä voidaan tehdä vaatimalla $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{5-k}$ ja $\sum_{j=1}^{5-k} a_j = 20$. Näin ollen erilaisia asetelmia on yhtä monta kuin joukossa

$$\mathcal{P}'(20, 5-k) = \{(a_1, \ldots, a_{5-k}) \ : \ 1 \leq a_1 < \cdots < a_{5-k} \text{ ja } \sum_{j=1}^{5-k} a_j = 20\}$$

on alkioita. Nyt huomataan, että kuvaus

$$(a_1, \ldots, a_{5-k}) \mapsto (a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, \ldots, a_{5-k} - (5-k-1))$$

joukolta $\mathcal{P}'(20, 5-k)$ osituksien joukolle $\mathcal{P}(20 - 1 - 2 - \cdots - (5-k-1), 5-k)$ on bijektio, joten

$$|\mathcal{P}'(20, 5-k)| = P(20 - \frac{(5-k-1)(5-k)}{2}, 5-k),$$

ja näin ollen erilaisia tapoja jakaa henkilöt ryhmiin tehtävän vaatimalla tavalla on

$$P(20-10, 5) + P(20-6, 4) = P(10,5) + P(14,4) = 7 + 23 = 30.$$

kappaletta.

Tehtävä 3(a)

Annetun nimetyn puun graafiesityksestä $\mathcal{E}$ saadaan laskettua Prüferin listaesitys seuraavalla tavalla:

1. $i = 1$
2. Olkoon v korkeanumeroisin solmu, jonka asteluku on 1. Etsi kaari $\{v, v'\} \in \mathcal{E}$ ja aseta $L[i] = v'$. Poista graafista kaari $\{v, v'\}$.
3. $i = i + 1$ ja jos $i < n - 1$ siirry kohtaan 2.
4. Prüferin listaesitys on $[L[1], \ldots, L[n-2]]$.

Algoritmin suoritus on alla olevassa taulukossa:

Solmujen asteluvut	i	v	$L[i]$	Poistettu kaari
$3,1,2,2,2,1,1$	1	7	3	$\{7,3\}$
$3,1,1,2,2,1,0$	2	6	1	$\{6,1\}$
$2,1,1,2,2,0,0$	3	3	4	$\{3,4\}$
$2,1,0,1,2,0,0$	4	4	1	$\{4,1\}$
$1,1,0,0,2,0,0$	5	2	5	$\{2,5\}$

Prüferin listaesitykseksi saadaan siis $[3,1,4,1,5]$.

Tehtävä 3(b)

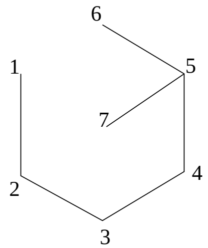
Seurataan kirjan algoritmia 3.11. Syöteenä lista $[L[1], L[2], \ldots, L[n-2]]$.

1. Puun solmujen lkm n = listan pituus + 2.
2. Solmun asteluku = solmun esiintymiskerrat listassa + 1.
3. Lisätään $L[n-1] = 1$.
4. Toistetaan kierroksille $i = 1, \ldots, n-1$.
   (a) Etsitään suurin solmu x, jonka asteluku on 1.
   (b) Lisätään kaari $\{x, L[i]\}$ puuhun.
   (c) Vähennetään solmujen x ja $L[i]$ astelukua yhdellä.

Annetun listan $[5, 5, 4, 3, 2]$ pituus on 5, joten puussa on $n = 7$ solmua. Edetään algoritmin mukaisesti.

		asteluvut							
i	$L[i]$	1	2	3	4	5	6	7	$x, L[i]$
1	5	1	2	2	2	3	1	$\underline{1}$	7, 5
2	5	1	2	2	2	2	$\underline{1}$	0	6, 5
3	4	1	2	2	2	$\underline{1}$	0	0	5, 4
4	3	1	2	2	$\underline{1}$	0	0	0	4, 3
5	2	1	2	$\underline{1}$	0	2	0	0	3, 2
6	1	1	$\underline{1}$	0	0	0	0	0	2, 1

Tuloksena saadaan allaolevan kuvan mukainen graafi.

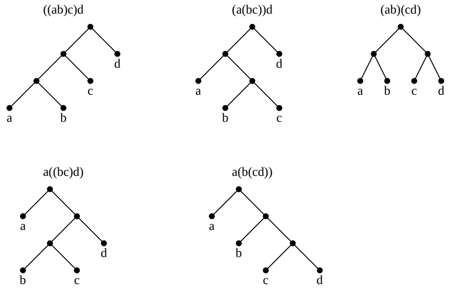


Kuva 1: Prüferin listaesitystä $[5, 5, 4, 3, 2]$ vastaava graafi.

T–79.161 Kombinatoriset algoritmit — Laskuharjoituksen 3 vastaukset
Haanpää / Oikarinen — Kevät 2004

Tehtävä 4

Jokaista $n+1$ termin tulon ryhmittelyä kahden alkion tuloiksi vastaa yksikäsitteisesti juurellinen järjestetty binääripuu, jonka haaroissa on kertolaskuoperaattori ja lehdissä tulon termit. Kuvassa 2 on esitetty kaikki neljän termin tulon eri ryhmittelytavat ja näitä vastaavat jäsennyspuut.



Kuva 2: Neljän termin tulon eri ryhmittelytavat ja näitä vastaavat jäsennyspuut.

Täysi binääripuu (full binary tree) on juurellinen puu, jossa jokainen solmu on joko lehtisolmu, tai sillä on kaksi lapsisolmua. Oletetaan lisäksi, että jokaisen solmun lapsisolmut on järjestetty, jotta voidaan puhua käsitteistä “vasen” ja “oikea” lapsi. Tällöin on selvää, että jokainen $n+1$ termin tulon jäsennyspuu on täysi binääripuu, jossa on $n+1$ lehtisolmua, ja kääntäen. Induktiolla voidaan osoittaa seuraava aputulos:

Aputulos. Täydessä binääripuussa, jossa on $n+1$ lehtisolmua, on täsmälleen n solmua, joilla on kaksi lapsisolmua.

Todistus. Perustapauksessa $n = 0$ väite on ilmeinen. Oletetaan nyt, että väite pätee tapauksissa $0 \le k \le n$, ja tarkastellaan täyttä binääripuuta, jossa on $(n+1)+1 \ge 2$ lehtisolmua. On selvää, että tällöin puun juurella tulee olla kaksi lapsisolmua. Olkoon l_1 juuren vasemman lapsen virittämän alipuun lehtisolmujen lukumäärä, ja l_2 vastaavasti juuren oikean lapsen virittämän alipuun lehtisolmujen lukumäärä. Koska juuri ei ole lehtisolmu, on oltava $n+2 = l_1 + l_2$ ja $l_1, l_2 \ge 1$, joten $l_1 \le n+1$ ja $l_2 \le n+1$. Näin ollen induktio-oletusta voidaan soveltaa juuren vasemman ja oikean lapsen virittämiin alipuihin, jotka selvästi ovat täysiä binääripuita. Koko puussa on siten $1+(l_1-1)+(l_2-1) = l_1+l_2-1 = n+1$ solmua (juuri mukaanluettuna), joilla on kaksi lapsisolmua. □

Aputuloksen välitön seuraus on, että täydessä binääripuussa, jossa on $n+1$ lehtisolmua, on täsmälleen $2n$ kaarta.

Catalanin perhe C_n koostuu kaikista $2n$-pituisista binäärijonoista $a_1 a_2 \cdots a_{2n}$, joille pätee

(a) jonossa on täsmälleen n nollaa ja n ykköstä, ja

(b) alijonossa $a_1 a_2 \cdots a_i$ on vähintään yhtä monta nollaa kuin siinä on ykköstä kaikilla $1 \leq i \leq 2n$.

Nyt on helppoa johtaa vastaavuus $(n+1)$-lehtisolmuisten täysien binääripuiden ja Catalanin perheen välille:

Olkoon annettu täysi binääripuu, jolla on $n+1$ lehtisolmua. Merkitään kaikki vasempaan lapseen johtavat kaaret nollalla, ja oikeaan lapseen johtavat kaaret ykkösellä. Käydään puu nyt läpi esijärjestyksessä (ensin solmu itse, sitten rekursiivisesti vasen lapsi, ja lopuksi rekursiivisesti oikea lapsi) siten, että tiettyyn solmuun saavuttaessa tulostetaan solmun isään johtavan kaaren numero.

On selvää, että tällöin jokainen $2n$ kaaresta tulostetaan kerran. Lisäksi tulostejono täyttää ehdon (a), koska jokaisella solmulla, jolla on vasen lapsi, on myös oikea lapsi; toisaalta ehto (b) täyttyy, koska jokaisen kaksilapsisen solmun vasempaan lapseen vievän kaaren numero tulostetaan aina ennen oikeaan lapseen vievän kaaren numeroa.

Toisaalta jos on annettu Catalanin perheeseen kuuluva binäärijono $a_1 a_2 \cdots a_{2n}$, voidaan sitä vastaava täysi binääripuu konstruoida seuraavasti:

1. Alussa puu koostuu vain sen juuresta, joka on lehtisolmu. Asetetaan juuri työsolmuksi.

2. Toistetaan järjestyksessä kaikille $i = 1, 2, \ldots, 2n$:

   (i) Jos $a_i = 0$, luodaan työsolmulle vasen lapsi, ja asetetaan lapsi työsolmuksi.

   (ii) Jos $a_i = 1$, edetään työsolmusta puun juurta kohti ensimmäiseen sellaiseen solmuun, jolla ei ole oikeata lapsisolmua. Luodaan tälle solmulle oikea lapsisolmu, ja asetetaan se työsolmuksi.

Konstruktio on hyvin määritelty, koska tasapainoehdon (b) mukaan kohdassa (ii) solmu, jolle voidaan lisätä oikea lapsi, on aina olemassa. Toisaalta tasapainoehdosta (a) saadaan, että jokaiselle solmulle, jolle on lisätty vasen lapsi kohdan (i) mukaisesti, lisätään myös oikea lapsi kohdan (ii) mukaisesti. Konstruktion tuloksena syntyy täysi binääripuu, jossa on $2n+1$ solmua ja $2n$ kaarta. Nyt voidaan jälleen osoittaa induktiolla, että tällaisessa puussa on oltava $n+1$ lehtisolmua. Näin ollen konstruktio tuottaa aina tulokseksi $(n+1)$-lehtisolmuisen täyden binääripuun.

Konstruktioiden määräämät kuvaukset puilta binäärijonoille (ja kääntäen binäärijonoilta puille) on nyt helppo todeta toistensa käänteiskuvauksiksi.

Laskuharjoitus 4

16.2.2004

1. Kuvaile peräytymishakualgoritmit seuraaville ongelmille:

   (a) Etsi graafin $\mathcal{G}$ solmujen k-väritykset.

   (b) Itseään välttävä kävely (*self-avoiding walk*) lähtee origosta ja ottaa askelia, joista jokainen on pituudeltaan 1. Kukin askel suuntautuu ylös, alas, vasemmalle tai oikealle ja missään tason pisteessä ei käydä kahdesti. Etsi kaikki itseään välttävät kävelyt, joiden pituus on n.

   (c) Steinerin kolmikkosysteemi STS(n) on pari $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$, missä $\mathcal{P}$ on n-alkioinen joukko ja $\mathcal{B}$ on $n(n-1)/6$:n $\mathcal{P}$:n 3-osajoukon (=kolmikon) joukko, missä jokainen pistepari kuuluu täsmälleen yhteen kolmikkoon. Steinerin kolmikkosysteemi on olemassa, vain jos $n \equiv 1 \mod 6$ tai $n \equiv 3 \mod 6$. Etsi kaikki Steinerin kolmikkosysteemit STS(n).

2. Määritellään graafin $\mathcal{G}$ kromaattinen luku

$$\chi(\mathcal{G}) = \min\{k \mid \mathcal{G}\text{:lla on solmujen } k\text{-väritys}\}$$

   ja klikkiluku

$$\omega(\mathcal{G}) = \max\{k \mid \mathcal{G}\text{:ssä on } k\text{:n kokoinen klikki}\}.$$

   Kirjan lemman 4.4 mukaan $\omega(\mathcal{G}) \leq \chi(\mathcal{G})$. Osoita, että epäyhtälö voi olla myös aito: etsi graafi, jolle $\omega(\mathcal{G}) < \chi(\mathcal{G})$.

3. Olkoon annettuna graafi $\mathcal{G}$ ja sen solmuille jokin järjestys. Ahne graafinväritysalgoritmi värittää graafin solmu kerrallaan pienimmästä suurimpaan siten, että kulloinkin väritettävän solmun väriksi valitaan pienin väri (oletetaan värit järjestetyiksi), joka ei esiinny väritettävän solmun jo väritetyissä naapureissa.

   (a) Esitä ääretön perhe graafeja, joiden solmut on järjestetty siten, että ahne väritysalgoritmi ei tuota optimaalista väritystä. (Väritys on optimaalinen jos värien lukumäärä on $\chi(\mathcal{G})$.)

   (b) Onko kaikille graafeille olemassa sellainen solmujen järjestys, että ahne algoritmi tuottaa optimaalisen värityksen?

Laskuharjoituksen 4 vastaukset

Tehtävä 1 (a)

Tarkastellaan solmuja järjestyksessä. Valintajoukkona on kunkin solmun kohdalla kaikkien värien joukko $\{1, 2, \ldots, k\}$, josta kuitenkin on poistettu ne värit, joilla on jo väritetty jokin parhaillaan tarkasteltavana olevan solmun naapuri.

Tehtävä 1(b)

Valintajoukkona tämänhetkisen solmun sijainnin naapuripisteiden, joissa ei ole vielä vierailtu, joukko. Kokeillaan näistä kutakin vuorollaan ja jatketaan valitusta uudesta solmusta rekursiivisesti, ellei jo ole otettu n askelta.

Tehtävä 1(c)

Jos $n \not\equiv 1 \mod 6$ ja $n \not\equiv 3 \mod 6$, ei ole olemassa Steinerin kolmikkosysteemiä STS(n). Muuten, generoidaan kaikki n-alkioisen joukon 3-alkioiset osajoukot ja järjestetään ne. Muodostetaan haluttua 3-osajoukkojen joukkoa lisäämällä siihen yksi 3-osajoukko kerrallaan. Valintajoukkona on sopivien 3-osajoukkojen joukko (kaikkien 3-osajoukkojen joukko – ne 3-osajoukot, joissa esiintyy joku jo valituissa osajoukoissa esiintyvä pari). Steinerin kolmikkosysteemi on löydetty, kun täydennetyn 3-osajoukkojen joukon koko on $n(n-1)/6$.

Tehtävä 2

Viiden solmun sykli $\mathcal{C}_5$ (viisikulmio) on kromaattiselta luvultaan 3, mutta sen suurimman klikin koko on 2.

Tehtävä 3 (a)

Olkoon $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ graafi, ja $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$. Solmujoukko $\mathcal{W}$ on *riippumaton* (independent), jos minkään sen kahden solmun välillä ei ole kaarta. Graafi $\mathcal{G}$ on *kaksijakoinen* (bipartite) jos sen solmujoukko $\mathcal{V}$ voidaan jakaa kahteen ei-tyhjään riippumattomaan joukkoon $\mathcal{W}$ ja $\mathcal{V} - \mathcal{W}$.

Kaksijakoinen graafi voidaan aina värittää kahdella värillä, koska molempiin riippumattomiin joukkoihin riittää yksi väri.

Täydellinen kaksijakoinen (complete bipartite) graafi $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ sisältää kaikki mahdolliset kaaret sen kahden riippumattoman joukon välillä, ts. kaikilla $u \in \mathcal{W}$ ja kaikilla $v \in \mathcal{V} - \mathcal{W}$ pätee $\{u, v\} \in \mathcal{E}$.

Konstruoidaan graafiperhe seuraavasti: Otetaan täydellinen kaksijakoinen graafi, jonka molemmissa riippumattomissa joukoissa on n solmua, ja järjestetään solmut siten, että ensimmäinen riippumaton joukko koostuu parittomista solmuista $\{1, 3, \ldots, 2n-1\}$, ja toinen parillisista $\{2, 4, \ldots, 2n\}$. Poistetaan graafista kaaret $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \ldots, \{2n-1, 2n\}$.

Ahne algoritmi värittää graafin seuraavasti: Solmulle 1 annetaan väri 1. Solmulle 2 annetaan väri 1, koska graafissa ei ole kaarta $\{1, 2\}$. Solmulle 3 annetaan väri 2, koska graafissa on kaari $\{2, 3\}$, ja väriä 1 ei näin ollen voi käyttää. Solmulle 4 annetaan väri 2, koska kaaren $\{1, 4\}$ takia väriä 1 ei voi käyttää. Solmulle 5 annetaan väri 3, koska kaarien $\{2, 5\}$ ja $\{4, 5\}$ takia värejä 1 ja 2 ei voi käyttää. Solmulle 6 annetaan väri 3, koska kaarien $\{1, 6\}$ ja $\{3, 6\}$ takia värejä 1 ja 2 ei voi käyttää, jne.

Yleisessä tapauksessa pariton solmu $2k-1$ ($k \geq 2$) väritetään värillä k, koska kaaret $\{2j, 2k-1\}$, $1 \leq j \leq k-1$ estävät k:ta pienempien värien käytön, sillä solmu $2j$ on väritetty värillä j kaikilla $1 \leq j \leq k-1$. Toisaalta parillinen solmu $2k$ ($k \geq 2$) väritetään värillä k, koska kaaret $\{2j-1, 2k\}$, $1 \leq j \leq k-1$ estävät k:ta pienempien värien käytön, sillä solmu $2j-1$ on väritetty värillä j kaikilla $1 \leq j \leq k-1$.

Graafin ahneeseen väritykseen tarvitaan siis lopulta n väriä, vaikka graafi on väritettävissä ainoastaan kahdella värillä.

Tehtävä 3 (b)

On selvää, että värityksestä riippumatta samalla värillä väritetyt graafin solmut muodostavat riippumattoman joukon. Oletetaan, että käytettävissä on optimaalinen väritys. Jos graafin solmut nyt listataan väriluokka kerrallaan (esim. ensin kaikki punaiset solmut, sitten siniset, jne.), saadaan solmuille järjestys, jolla ahne algoritmi tuottaa optimaalisen värityksen. Saatu ahne väritys ei välttämättä ole identtinen alkuperäisen värityksen kanssa, mutta värien lukumäärä on sama.

Laskuharjoitus 5

23.2.2004

1. Esitä jokin mielekäs kustannusfunktio ja naapuristo seuraaville vaikeille kombinatorisille optimointiongelmille.
   (a) Symmetrinen kauppamatkustajan ongelma.
   (b) Graafin väritys n värillä siten, että naapurisolmuilla on eri väri.
   (c) Graafin ositus: Jaa graafin solmut, joita on parillinen määrä, kahteen yhtäsuureen osaan siten, että osien välisten kaarien määrä on mahdollisimman pieni.
   (d) Lukujen ositus: jaa joukko $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kahteen osaan A_1 ja A_2 siten, että $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ja
$$\sum_{a \in A_1} a = \sum_{a \in A_2} a.$$
2. Etsi graafi, ja sille käypä ositus $[X_1, X_2]$ ($|X_1| = |X_2|$), joka on lokaali optimi (kun naapuristona on yhden solmun vaihtaminen X_1:stä X_2:teen ja päinvastoin), mutta joka ei ole globaali optimi (parempi käypä ratkaisu löytyy vaihtamalla kaksi solmua X_1:stä X_2:teen).
3. Esitä simuloitua jäähdytystä käyttävä algoritmi maksimiklikki ongelmalle.

Laskuharjoituksen 5 vastaukset

Tehtävä 1 (a)

Kustannusfunktiona luonnollisin valinta on reitin pituus. Eräs mahdollisuus naapuristoksi on ns. 2-OPT -siirrot: muodostetaan nykyistä reittiä kuvaavasta graafista uusi reitti poistamalla kaksi kaarta ja lisäämällä kaksi kaarta.

Tehtävä 1 (b)

Tässä kuvataan ns. fixed-k lähestymistapa. Ratkaisu on mikä tahansa solmujen ositus k osaan (tyhjät osat sallitaan). Kaksi väritystä ovat toistensa naapurit, jos toinen saadaan toisesta siirtämällä jokin solmu osasta toiseen. Kustannusfunktiona esim. niiden kaarien lukumäärä, joiden molemmat solmut ovat samassa osituksen osassa. Naapuristoa voidaan rajoittaa seuraavasti: nykyistä ratkaisua voidaan muuttaa vain niiden solmujen osalta, joista lähtee ainakin yksi väritysehtoa rikkova kaari; tällöin tosin naapuristo ei enää ole symmetrinen.

Tehtävä 1 (c)

Yksinkertainen lähestymistapa: ratkaisujoukkona on kaikki solmujen ositukset kahteen osaan. Siirto on kahden solmun vaihto osien välillä. Kustannusfunktiona kaarien määrä osien välillä.

Parempi suorituskyky on saatu simuloidulla jäähdytyksellä, kun on sallittu mielivaltaiset ositukset kahteen osaan V_1 ja V_2. Siirtoina on nyt yhden solmun siirto osasta toiseen, ja kustannusfunktiossa on lisäksi sakkona summatermi

$$\alpha(|V_1| - |V_2|)^2,$$

joka lisää kustannusta aina kun osat ovat erikokoiset. Optimointialgoritmi saattaa sakkotermistä huolimatta päätyä epätasapainoiseen ratkaisuun, jolloin voidaan joko kasvattaa α:n arvoa tai lisätä jokin yksinkertainen heuristiikka, joka muutamaa solmua siirtämällä pääsee tasapainotettuun ratkaisuun.

Tehtävä 1 (d)

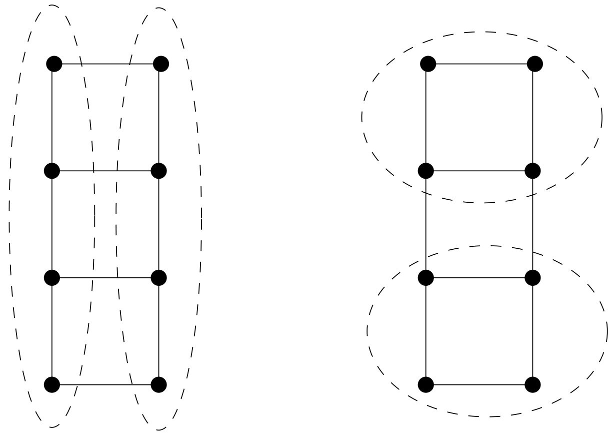
Otetaan ratkaisujoukoksi kaikki ositukset kahteen osaan. Määritellään k-naapuristo sellaiseksi, jossa yhdellä siirrolla saadaan siirtää enintään k alkiota osituksesta toiseen. Kustannusfunktioksi voidaan ottaa

$$\left| \sum_{a \in A_1} a - \sum_{a \in A_2} a \right|.$$

Tämä ongelma on hiukan hankala sikäli, että siinä on pahimmillaan hyvin paljon lokaaleja optimeja. Simuloitu jäähdytys esitetyllä naapuristolla ei pärjää erityisesti tähän ongelmaan kehitetylle Karmarkar-Karp -heuristiikalle, mutta parempaa on kehitetty.

Tehtävä 2

Vasemmalla graafin ositus, joka on lokaali optimi, josta ei yhden solmun osasta toiseen siirrolla päästä globaaliin optimiin (kuvassa oikealla), johon päästään siirtämällä kaksi solmua osasta toiseen.



Tehtävä 3

Maksimiklikin etsivä simuloitua jäähdytystä käyttävä algoritmi on esitetty pseudokoodilla seuraavasti:

```
Find_Max_Clique(G, c_max, T_0, α)
    c = 0
    T = T_0
    Choose feasible X ∈ 𝒳
    X_best = X
    while c ≤ c_max
          Y = h_N(X)
          if Y ≠ Fail
               if |Y| > |X|
                    X = Y
                    if |X| > |X_best|
                         X_best = X
               else
                    r = random(0, 1)
                    if r < e^((|Y|−|X|)/T)
                         X = Y
          c = c + 1
          T = αT
    return X_best
```

Jäähdytys tapahtuu lineaarisesti, ja α, c_{max} ja T_0 pitää valita sopivasti. Joukkona $\mathcal{X}$ on G:n aligraafien joukko ja $X \in \mathcal{X}$ on käypä, jos sen on klikki (eli kaikilla $x, y \in X, x \neq y$ on X:ssä kaari x:n ja y:n välillä). Kohdefunktiona on klikin (eli aligraafin) koko. X:n naapuristoksi $N(X)$ voidaan valita (esimerkiksi) G:n aligraafit, jotka saadaan lisäämällä tai poistamalla X:stä yksi solmu ja siihen liittyvät kaaret. Heuristiikkana h_N voidaan käyttää esimerkiksi valintaa "jokin käypä $Y \in N(X)$".

Kotitehtävä 2

Euroopan unionin yhteisvaluutta euro toi mukanaan eurokolikot ja setelit vuoden 2002 alussa. Käyttöön tulivat senttiarvoisten kolikoiden lisäksi 1 ja 2 euron kolikot sekä 5, 10, 20, 50, 100, 200 ja 500 euron setelit.

Eräs hyvyyskriteeri rahojen nimellisarvovalikoimalle on, millaisia rahasummia voidaan maksaa siten, että vain pieni määrä rahoja (kolikoita tai seteleitä) vaihtaa omistajaa. Esimerkiksi 46 euroa voidaan maksaa 50 euron setelillä ja saada kaksi 2 euron kolikkoa takaisin. Se voidaan myös maksaa 50 euron setelillä ja 1 euron kolikolla ja saada 5 euron seteli takaisin.

$L(k,m)$ on suurin L, jolle voidaan löytää k kokonaisluvun nimellisarvovalikoima, jolla jokainen rahasumma $1,2,3,\dots,L$ voidaan maksaa niin, että enintään m rahaa vaihtaa omistajaa. Toisin sanoen, $L(k,m)$ on suurin kokonaisluku L, jolla on olemassa sellainen k alkion joukko $W = \{w_1,\dots,w_k\} \subset \mathbb{N}$, että kaikille $x \in \{1,\dots,L\}$ on olemassa kokonaislukukertoimet $m_1,\dots,m_k$, joilla $x = \sum_{i=1}^{k} m_i w_i$ ja $\sum_{i=1}^{k} |m_i| \le m$.

- Mikä on pienin rahasumma, jonka maksamiseen eurorahoilla ei riitä, että kolme rahaa vaihtaa omistajaa?

- Millainen nimellisarvovalikoima Euroopan unionissa olisi tullut ottaa käyttöön? Laadi ei-triviaaliin heuristiikkaan (simuloitu jäähdytys, tabu-haku, geneettinen algoritmi tai vastaava) perustuva tietokoneohjelma, joka etsii mahdollisimman hyvän alarajan ja vastaavan nimellisarvovalikoiman $L(k,3)$:lle, missä $7 \le k \le 9$. Voit tutkia, löytääkö ohjelmasi $L(k,m)$:n tunnettuja arvoja $L(1,3) = 3$, $L(2,3) = 12$, $L(3,3) = 24$, $L(4,3) = 47$, $L(5,3) = 73$ ja $L(6,3) = 110$ vastaavia nimellisarvovalikoimia.

Erityisen ansiokkaista ratkaisuista voi saada bonuspisteen tenttiin. Bonuspisteen tavoittelemiseksi voi esimerkiksi esittää erinomaisen tehokkaan heuristiikan ja löytää tarvittavaan laskenta-aikaan suhteutettuna erinomaisia alarajoja $L(k,m)$:lle eri k:n ja m:n arvoilla tai vertailla eri lähestymistapojen tehokkuutta.

Palautukseen tulee sisältyä ratkaisun sanallinen kuvaus (esim. tekstinä tai hyvälaatuisena Postscriptinä), josta käy ilmi löydetyt $L(k,m)$:n alarajat vastaavine nimellisarvojoukkoineen sekä tarvittu laskenta-aika. Palautuksen liitteenä tulee olla käytettyjen tietokoneohjelmien *kommentoitu* lähdekoodi.

Palautus assistentille (Emilia.Oikarinen@hut.fi) sähköpostitse esimerkiksi tekstinä tai hyvälaatuisena Postscriptinä maanantaihin 22.3.2004 mennessä.

Laskuharjoitus 6

8.3.2004

Tutkitaan paikallisen haun naapurustojen määräämiä graafeja. *Konfiguraatiograafin* solmuina ovat kaikki hakuavaruuden $\mathcal{X}$ alkiot, ja kahden solmun välillä on kaari jos ja vain jos solmut kuuluvat toistensa naapurustoon. (Oletetaan naapurusto $\mathsf{N} : \mathcal{X} \to 2^{\mathcal{X}}$ symmetriseksi, ts. kaikilla $x, y \in \mathcal{X}$ pätee $x \in \mathsf{N}(y)$ jos ja vain jos $y \in \mathsf{N}(x)$.)

1. Esitä mielekäs konfiguraatiograafi seuraaville ongelmille:
   (a) Eksakti peitto: etsi annetusta kokoelmasta perusjoukon osajoukkoja sellainen kokoelma osajoukkoja, jossa jokainen perusjoukon piste esiintyy täsmällään yhdessä osajoukossa.
   (b) Graafin solmujen väritys enintään k:lla värillä.
   (c) Kauppamatkustajan ongelma (transpositionaapurustolla).
   (d) Graafin ositus: Jaa graafin solmut, joita on parillinen määrä, kahteen yhtäsuureen osaan siten, että osien välisten kaarien määrä on mahdollisimman pieni/suuri.
   (e) Etsi k-klikki annetusta graafista.

2. Paikallisen haun kannalta mielenkiintoisia konfiguraatiograafin ominaisuuksia ovat mm.
   (a) solmujen lukumäärä (order)
   (b) solmun naapurisolmujen lukumäärä (vertex degree)
   (c) onko graafi kytketty (connected), eli onko jokaisesta solmusta polku kaikkiin muihin solmuihin
   (d) lyhimmän syklin pituus (girth)
   (e) pisimmän syklin pituus (circumference)
   (f) graafin halkaisija (diameter), eli pisimmän kahta solmua yhdistävän lyhimmän polun pituus.

   Määritä nämä ominaisuudet 1. tehtävän konfiguraatiograafeille.

Laskuharjoituksen 6 vastaukset

Tehtävä 1 (a,b)

Oletetaan (a)-kohdassa, että annetussa osajoukkokokoelmassa on täsmälleen n osajoukkoa $E_1, E_2, \ldots, E_n \subseteq F$, missä F on perusjoukko. Paikallisen haun tehtävä on nyt löytää osajoukko $\{j_1, \ldots, j_w\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ siten, että $E_{j_1} \cup \cdots \cup E_{j_w} = F$ ja $E_{j_s} \cap E_{j_t} = \emptyset$ aina kun $s \neq t$. Toisin sanoen kokoelma $E_{j_1}, \ldots, E_{j_w}$ osittaa joukon F. Valitaan hakuavaruudeksi $\mathcal{X}$ kaikki joukon $\{1, \ldots, n\}$ osajoukot, ja määritellään naapurusto N minimimuutosperiaatteella: osajoukko $x \in \mathcal{X}$ on osajoukon $y \in \mathcal{X}$ naapuri jos ja vain jos y on saatu x:stä lisäämällä tai poistamalla yksi alkio. Hakuavaruuden alkiot voidaan samaistaa n-mittaisten binäärijonojen kanssa jo tutuksi käyneellä tavalla.

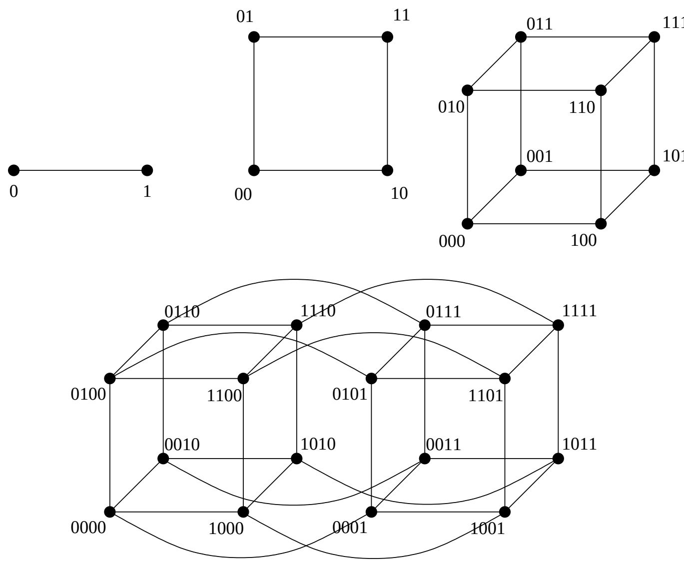
Oletetaan (b)-kohdassa, että väritettävässä graafissa on täsmälleen n solmua, jotka on nimetty $v_1, \ldots, v_n$. Otetaan hakuavaruudeksi $\mathcal{X}$ kaikki tavat valita jokaiselle graafin solmulle jokin q:sta erilaisesta väristä. Huomaa, että tällainen värivalinta ei yleisessä tapauksessa ole laillinen graafin väritys q:lla värillä. Värivalinnat voidaan tällöin selvästi mieltää pituutta n oleviksi sanoiksi yli q-alkioisen aakkoston: sanan i:s kirjainpaikka määrää solmun v_i värin kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. Naapurusto voidaan jälleen määrätä minimimuutosperiaatteella: värivalinnat x ja y ovat toistensa naapureita jos ja vain jos ne poikkeavat toisistaan täsmälleen yhdessä paikassa.

(a)- ja (b)-kohtien naapurustovalintoja vastaava konfiguraatiograafi on seuraava: *Hamming-graafin* $H(n, q)$ solmujoukko koostuu kaikista pituutta n olevista sanoista yli q-alkioisen aakkoston $\Sigma_q = \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$, ts. $\mathcal{V} = \Sigma_q^n$. Solmujen $x, y \in \mathcal{V}$ välillä on kaari jos ja vain jos sanat x ja y poikkeavat toisistaan täsmälleen yhdessä paikassa.

Kuvassa 3 esimerkkinä Hamming-graafit $H(n, 2)$ kun $n = 1, 2, 3, 4$.

Tehtävä 1 (c)

Oletetaan, että kaupunkeja on n kappaletta. Mallinnetaan kauppamatkustajan mahdollisia kierroksia joukon $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ permutaatioina. Tällöin permutaation $\pi \in S_n = \mathcal{X}$ listaesitys $[\pi(0), \pi(1), \ldots, \pi(n-1)]$ kertoo missä järjestyksessä kaupungit käydään läpi: lähdetään kaupungista $\pi(0)$, sitten kaupunkiin $\pi(1)$, ..., kunnes palataan kaupungista $\pi(n-1)$ takaisin kaupunkiin $\pi(0)$. Määritellään naapurusto siten, että kaksi permutaatiota $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{X}$ ovat toistensa naapureita jos ja vain jos toinen saadaan toisesta yhden transposition avulla (ts. toinen saadaan toisesta vaihtamalla kahden kaupungin paikkaa permutaation listaesityksessä).



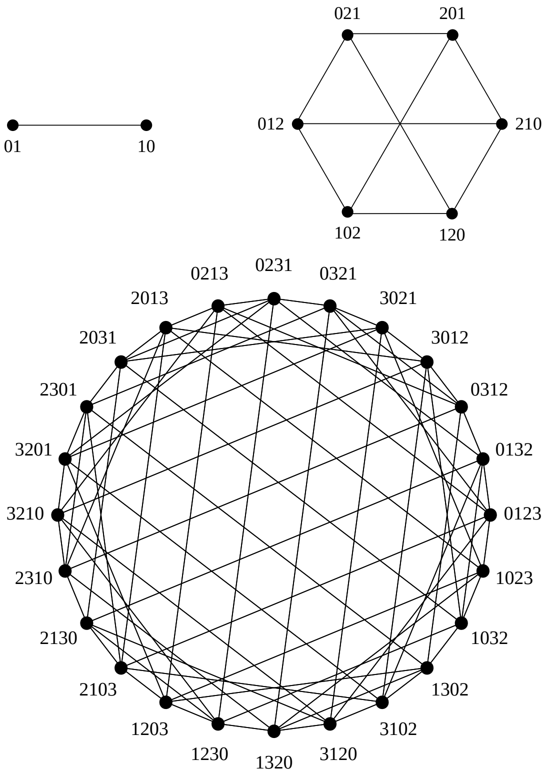
Kuva 3: Hamming-graafit $H(n, 2)$ kun $n = 1, 2, 3, 4$.

Muodostuva konfiguraatiograafi on transpositioiden generoima symmetrisen ryhmän *Cayley-graafi*. Cayley-graafin $\Gamma(S_n, T_n)$ solmuina ovat kaikki joukon $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ permutaatiot $\pi \in S_n$. Permutaatioiden $\pi_1, \pi_2 \in S_n$ välillä on kaari jos ja vain jos $\pi_1^{-1}\pi_2 \in T_n$, missä T_n on kaikkien joukon $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ transpositioiden joukko.

Kuvassa 4 esimerkkinä Cayley-graafit $\Gamma(S_n, T_n)$ kun $n = 2, 3, 4$.

Tehtävä 1 (d,e)

Oletetaan (d)-kohdassa, että annetussa graafissa on $2n$ solmua. Graafinositusongelman hakuavaruudeksi $\mathcal{X}$ voidaan valita esimerkiksi kaikki annetun solmujoukon n-osajoukot. Tällöin kulloisenkin osituksen muodostavat tarkasteltava n-osajoukko ja sen komplementti. Vastaavasti (e)-kohdan klikkihaun tapauksessa hakuavaruudeksi $\mathcal{X}$ voidaan valita esimerkiksi kaikki solmujoukon k-osajoukot. Naapuruusto voidaan jälleen määritellä minimimuutosperiaatteella: osajoukot

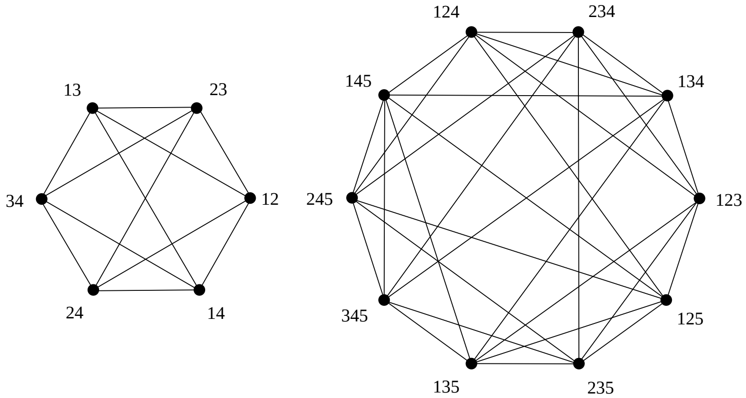


Kuva 4: Cayley-graafit $\Gamma(S_n, T_n)$ kun $n = 2, 3, 4$.

ovat toistensa naapureita jos ja vain jos toinen saadaan toisesta lisäämällä yksi ja poistamalla yksi alkio.

Muodostuva konfiguraatiograafi on *Johnson-graafi* $J(v, k)$: graafin solmuina ovat kaikki joukon $\{1, 2, \ldots, v\}$ k-osajoukot; kahden solmun E_1, E_2 välillä on kaari jos ja vain jos $|E_1 \cap E_2| = k - 1$.

Kuvassa 5 esimerkkinä Johnson-graafit $J(4, 2)$ ja $J(5, 3)$.



Kuva 5: Johnson-graafit $J(4, 2)$ ja $J(5, 3)$.

Tehtävä 2

Tarkastellaan ominaisuuksia graafiluokka kerrallaan.

1. Hamming-graafi $H(n, q)$

   (a) Solmujen lukumäärä on selvästi q^n.

   (b) Jokaisella solmulla on $n(q-1)$ naapurisolmua, koska poikkeava koordinaatti voidaan valita n tavalla, ja poikkeava koordinaattiarvo $q - 1$ tavalla.

   (c) Hamming-graafi on kytketty. Mielivaltaisesta solmusta päästään mielivaltaiseen solmuun graafin kaaria pitkin muuttamalla lähtösolmun koordinaattiarvot koordinaatti kerrallaan maalisolmun koordinaattiarvoiksi.

   (d) Lyhimmän syklin pituus on 4 kun $q = 2$, ja 3 kun $q > 2$. Tämä nähdään

   (e) Pisimmän syklin pituus on q^n, ts. graafista löytyy sykli, jossa esiintyvät kaikki sen solmut. Tapauksessa $q = 2$ tällaisen syklin muodostaa esimerkiksi aiemmin tarkasteltu peilattu Gray-koodi G^n. Peilatun Gray-koodin konstruktio yleistyy suoraviivaisesti tapauksiin, missä q on parillinen. Parittoman q:n tapauksessa peilauskonstruktio toimii hieman muutettuna: Olkoon $x_1, \ldots, x_N$ pituutta n oleva koodi. Muodostetaan pituutta $n + 1$ oleva koodi seuraavasti:

- Toistetaan kaikille $0 \le p \le q-3$:
  Jos p parillinen, tulosta osakoodi $px_1, px_2, \ldots, px_N$.
  Jos p pariton, tulosta osakoodi $px_N, px_{N-1}, \ldots, px_1$.
- Tulosta osakoodi $(q-2)x_N, (q-2)x_{N-1}, \ldots, (q-2)x_2$.
- Tulosta osakoodi $(q-1)x_2, (q-1)x_3, \ldots, (q-1)x_N$.
- Tulosta osakoodi $(q-1)x_1, (q-2)x_1$.

(f) Graafin halkaisija on selvästi n, koska mistä tahansa solmusta pääsee mihin tahansa solmuun muuttamalla enintään n koordinaattipaikkaa. Toisaalta n koordinaattipaikkamuutosta tarvitaan, jotta päästäisiin esimerkiksi solmusta $00\cdots0$ solmuun $11\cdots1$.

2. Cayley-graafi $\Gamma(S_n, T_n)$

(a) Koska joukon $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ permutaatioita on $n!$ kpl, on graafissa $n!$ solmua.

(b) Joukon $\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ transpositioita on $\binom{n}{2}$ kpl, joten millä tahansa graafin solmulla on yhtä monta naapurisolmua.

(c) Graafi on kytketty, koska transpositiot generoivat symmetrisen ryhmän.

(d) Tapauksessa $n=2$ graafissa ei ole syklejä. Muutoin lyhimmän syklin pituus on enintään 4: permutaatiot

$$\pi, \quad \pi(0,1), \quad \pi(0,1)(1,2), \quad \pi(0,1)(1,2)(0,1)$$

muodostavat 4-syklin, koska $\pi(0,1)(1,2)(0,1)(0,2) = \pi$. Toisaalta graafi ei voi sisältää 3:n mittaista sykliä, koska tällöin syklin kaaria vastaavat 3 transpositiota muodostaisivat identiteettipermutaation, mikä on mahdotonta koska identiteetti on parillinen permutaatio.

(e) Pisimmän syklin pituus on $n!$, joka saadaan esim. Trotter-Johnson minimimuutosjärjestyksestä.

(f) Graafin halkaisija on $n-1$, sillä mikä tahansa permutaatio voidaan esittää enintään $n-1$ transposition tulona. Toisaalta esimerkiksi identiteetistä n-sykliin $(0,1,2,\ldots,n-1)$ pääsemiseksi tarvitaan ainakin $n-1$ transpositiota.

3. Johnson-graafi $J(v,k)$

(a) Solmuja on yhtä monta kuin v-joukolla k-osajoukkoja, ts. $\binom{v}{k}$ kpl.

(b) Annetusta v-joukon k-osajoukosta voidaan ottaa alkio pois k:lla tavalla, ja siihen lisätä poistetusta poikkeava alkio $v-k$ tavalla. Näin ollen kaikilla solmuilla on $k(v-k)$ naapurisolmua.

T–79.161 Kombinatoriset algoritmit — Laskuharjoituksen 6 vastaukset
Haanpää / Oikarinen — Kevät 2004

(c) Graafi on kytketty, koska on selvää että alkioita lisäämällä ja poistamalla mikä tahansa k-osajoukko voidaan muuttaa miksi tahansa toiseksi k-osajoukoksi.

(d) Tapauksissa $v=k$ tai $v=2$ graafissa ei ole syklejä. Lyhimmän syklin pituus on selvästi 3, koska $\{x,y\}$, $\{x,z\}$, $\{y,z\}$ ovat toistensa naapureita kun $k \ge 2$. Tapaus $k=1$ on suoraviivainen.

(e) Pisimmän syklin pituus on $\binom{v}{k}$, mikä saadaan esim. revolving door -minimimuutosjärjestyksestä (kirjan s. 48–52).

(f) Graafin halkaisija on enintään k, mikä saavutetaan kun graafista on löydettävissä kaksi solmua, jotka eivät leikkaa toisiaan. Näin on selvästi täsmälleen silloin kun $v \ge 2k$. Kun $v < 2k$, mielivaltaiset kaksi k-osajoukkoa leikkaavat ainakin $2k-v$ pisteessä. Näin ollen graafin halkaisijaksi saadaan yleisessä tapauksessa $k - \max(2k-v, 0) = \min(k, v-k)$.

Laskuharjoitus 7

15.03.2004

1. Esitä joitakin sopivia tabuehtoja seuraavien harjoituksessa 5 esiteltyjen optimointitehtävien kanssa käytettäväksi (naapuristo ja kohdefunktio kuin harjoituksessa 5).

   (a) Symmetrinen kauppamatkustajan ongelma.

   (b) Graafin väritys n värillä siten, että naapurisolmuilla on eri väri.

   (c) Graafin ositus: Jaa graafin solmut, joita on parillinen määrä, kahteen yhtäsuureen osaan siten, että osien välisten kaarien määrä on mahdollisimman pieni.

   (d) Lukujen ositus: jaa joukko $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kahteen osaan A_1 ja A_2 siten, että $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ja

   $$\sum_{a \in A_1} a = \sum_{a \in A_2} a.$$

2. Olkoon G ei-tyhjä joukko ja $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ ehdot (a)–(c) täyttävä kuvaus joukolta $G \times G$ joukolle G.

   (a) kaikilla $g_1, g_2, g_3 \in G$ pätee $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.

   (b) on olemassa alkio $1 \in G$, jolle pätee $g \cdot 1 = g$ kaikilla $g \in G$.

   (c) kaikilla $g \in G$ on olemassa alkio $g^{-1} \in G$, jolle $g^{-1} \cdot g = 1$.

   Osoita, että alkio $1 \in G$ ei tällöin ole välttämättä yksikäsitteinen.

   Entä jos (b) korvataan ehdolla "on olemassa alkio $1 \in G$, jolle pätee $1 \cdot g = g$ kaikilla $g \in G$" ?

3. Olkoon G äärellinen ryhmä, H ryhmän G aliryhmä, ja K ryhmän H aliryhmä. Olkoon $\{g_1, \ldots, g_n\}$ ryhmän H vasen transversaali ryhmän G suhteen, ja olkoon $\{h_1, \ldots, h_m\}$ ryhmän K vasen transversaali ryhmän H suhteen. Osoita, että mielivaltainen $g \in G$ voidaan aina esittää muodossa $g = g_i \cdot h_j \cdot k$, missä $k \in K$ ja $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Laskuharjoituksen 7 vastaukset

Tehtävä 1

Kuten laskuharjoituksessa 5, tässäkään esitetyt ratkaisut eivät välttämättä ole kaikissa tapauksissa parhaita mahdollisia. On syytä kokeilla erilaisia ratkaisuja ja valita se, joka toimii tarkasteltavissa ongelmainstansseissa parhaiten.

(a) Esimerkiksi: Lisättyä kaarta ei saa poistaa seuraavalla n askeleella. Poistettua kaarta ei saa lisätä seuraavalla m askeleella. Parametrit n ja m täytyy virittää sopiviksi ongelmainstanssista riippuen.

(b) Esimerkiksi: Jos solmun väri on muutettu esim. väristä v_i väriin v_j, ei sitä saa muuttaa seuraavalla n kierroksella väriin v_i. Vaihtoehtoisesti: Jos solmun v väriä on muutettu, ei solmun v väriin saa koskea seuraavalla n kierroksella. Tämä rajoittaa hakua enemmän kuin edellinen ehto.

(c) Jos solmut v_1 ja v_2 on vaihdettu keskenään, niin tätä paria ei saa vaihtaa uudelleen seuraavan n:n kierroksen aikana. Vaihtoehtoisesti: Jos v on siirretty osituksesta toiseen, niin sitä ei saa siirtää seuraavan n kierroksen aikana.

(d) Jos $k = 1$, voidaan käyttää suoraan edellisen kohdan tabuehtoja.

Jos $k > 1$, on tilanne mutkikkaampi: voidaan käyttää samaa tabulistaa kuin edellä, mutta se saattaa rajoittaa valittavia siirtoja liikaa. Yksi mahdollisuus olisi tarkastella summaa $S_1 = \sum_{a \in A_1} a$. Jos jonkin siirron jälkeen $S_1 = x$, seuraavan n:n kierroksen ajan sellaiset siirrot, joiden jälkeen $S_1 = x$, ovat kiellettyjä. Tämä taas ei toimi silloin jos S_1:llä on vain muutamia mahdollisia arvoja.

Tehtävä 2

Olkoon G mielivaltainen ei-tyhjä joukko ja määritellään laskutoimitus $(g_1, g_2) \mapsto g_1$. Laskutoimitus on selvästi assosiatiivinen (ehto (a)), koska

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot g_2 = g_1 = g_1 \cdot g_2 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3).$$

Valitaan nyt alkioksi 1 mielivaltainen joukon G alkio. Ehto (b) on voimassa, koska selvästi on $g \cdot 1 = g$ kaikilla $g \in G$. Toisaalta ehto (c) on voimassa, koska voidaan asettaa $g^{-1} := 1$ kaikille $g \in G$. Näin ollen jos G:ssä on vähintään 2 alkiota ykkösalkio ei ole yksikäsitteinen.

Jos ehto (b) muutetaan muotoon "on olemassa alkio $1 \in G$, jolle pätee $1 \cdot g = g$ kaikilla $g \in G$" voidaan ykkösalkio osoittaa yksikäsitteiseksi: Valitaan mielivaltainen $g \in G$ ja otetaan käyttöön lyhennysmerkinnät $g_1 g_2 := g_1 \cdot g_2$, $g' := g^{-1}$ ja $g'' := (g^{-1})^{-1}$. Nyt saadaan ehtojen (a–c) perusteella

$$g1 = 1(g1) = (1g)1 = ((g''g')g)1 = (g''(g'g))1 = (g''1)1 =$$

$$= g''(11) = g''1 = g''(g'g) = (g''g')g = 1g = g,$$

joten $1g = g1 = g$ kaikilla $g \in G$. Näin ollen jos on olemassa alkiot $1 \in G$ ja $1' \in G$, jotka molemmat täyttävät ehdot (b) ja (c), voidaan päätellä $1' = 11' = 1$. Kun ykkösalkio on todettu yksikäsitteiseksi, voidaan vasen käänteisalkio osoittaa myös oikeaksi käänteisalkioksi käyttämällä aksioomia (a–c):

$$gg' = g(1g') = (g1)g' = (g(g'g))g' = ((gg')g)g' = (gg')(gg'),$$

joten on oltava $gg' = 1$. Nyt käänteisalkion yksikäsitteisyys voidaan todeta seuraavasti:

$$g' = g'1 = g'(g\hat{g}') = (g'g)\hat{g}' = 1\hat{g}' = \hat{g}'.$$

Tehtävä 3

Jos H on äärellisen ryhmän G aliryhmä ja $\{g_1, \ldots, g_n\}$ryhmän H vasen transversaali G, niin määritelmän mukaan joukko $\{g_1 H, \ldots, g_n H\}$, missä $g_i H := \{g_i h \mid h \in H\}$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, on joukon G ositus (G:n jako ei-tyhjiin pistevieraisiin osajoukkoihin). Valitaan nyt jokin $g \in G$. Koska joukot $g_i H$ osittavat joukon G, on olemassa yksikäsitteinen i, jolle $g \in g_i H$. Edelleen on olemassa yksikäsitteinen $h \in H$ jolle $g = g_i h$, koska jos on $g_i h = g = g_i h'$, voidaan päätellä

$$h = 1h = (g_i^{-1} g_i)h = g_i^{-1}(g_i h) = g_i^{-1}(g_i h') = (g_i^{-1} g_i)h' = 1h' = h'.$$

Näin ollen jokainen $g \in G$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa $g_i h$, missä $h \in H$. Vastaavalla päättelyllä voidaan nyt todeta, että em. esityksen $h \in H$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa $h = h_j k$, missä $k \in K$ ja $h_j \in \{h_1, \ldots, h_m\}$. Päättelyä voitaisiin selvästi jatkaa myös tästä eteenpäin jos K:lla olisi aliryhmä jne.

Edellisen kaltaisesta esityksestä on hyötyä, jos halutaan esimerkiksi käsitellä äärellisiä ryhmiä tietokoneella. Tällöin ryhmää voidaan käsitellä kokoelmana transversaaleja tietyn aliryhmäketjun suhteen. Esim. Schreier-Sims esityksessä (kirjan kappale 6.2.3) aliryhmäketju koostuu sisäkkäisistä pisteen stabiloija-aliryhmistä.

Laskuharjoitus 8

22.3.2004

1. Kuinka monella toisistaan poikkeavalla tavalla voidaan numeroida kuution kuusi sivutahkoa, kun jokaiselle tahkolle annetaan oma numero? (Kuutio oletetaan täysin symmetriseksi, ja numeroiden asennolla sivutahkossa ei ole merkitystä.) Entäpä dodekaedrin 12 sivutahkoa?

2. Kuinka monella tavalla 19-joukko voidaan osittaa yhteen 4-alkioiseen osajoukkoon, ja kolmeen 5-alkioiseen osajoukkoon? Yksi tällainen ositus on esimerkiksi

$$\{\{1,2,3,4,5\}, \{6,7,8,9,10\}, \{11,12,13,14,15\}, \{16,17,18,19\}\}.$$

3. Tutkitaan joukon $\{0, 1, \ldots, 9\}$ permutaatioryhmää G, jonka Schreier-Sims-esitys on

$$\overrightarrow{G} = (\beta : [\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_9]),$$

missä $\beta = \mathbf{I}$ ja

$$\mathcal{U}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I},\ (0,1,3,6)(2,5,9,7)(4,8),\ (0,2,5,9,6)(1,4,8,3,7), \\ (0,3)(1,6)(2,9)(5,7),\ (0,4,9,6)(1,2,5,8)(3,7), \\ (0,5,6,2,9)(1,8,7,4,3),\ (0,6,9,5,2)(1,7,3,8,4), \\ (0,7,6)(1,2,8)(3,4,9),\ (0,8,4,1,9)(2,5,3,6,7), \\ (0,9,2,6,5)(1,3,4,7,8) \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I},\ (1,2)(3,4)(6,7),\ (1,3,6)(2,4,7)(5,9,8), \\ (1,4)(2,3)(6,7)(8,9),\ (1,6)(2,7)(5,9), \\ (1,7,3,2,6,4)(5,8,9) \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{\mathbf{I}\}, \qquad \mathcal{U}_3 = \{\mathbf{I},\ (3,6)(4,7)(5,8)\},$$

$$\mathcal{U}_4 = \mathcal{U}_5 = \mathcal{U}_6 = \mathcal{U}_7 = \mathcal{U}_8 = \mathcal{U}_9 = \{\mathbf{I}\}.$$

Mitkä seuraavista permutaatioista kuuluvat ryhmään G?

(a) $\alpha = (0,1,2,3,4,5,6)$

(b) β=$(0,1,2,3,4)(5,6,7,8,9)$

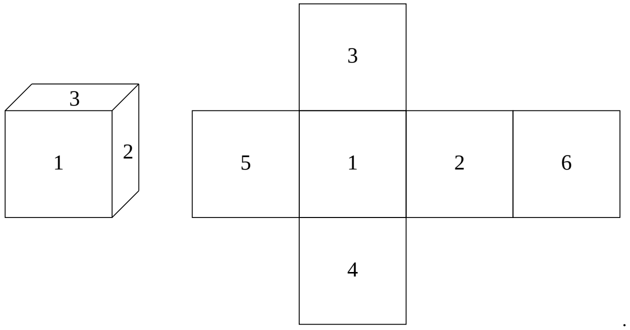
(c) γ=$(0,3,5,8,7)(1,9,2,6,4)$

Mikä on ryhmän G koko?

Laskuharjoituksen 8 vastaukset

Tehtävä 1

Nimetään aluksi kuution kuusi sivutahkoa jollakin tavalla (esim. kansi, pohja, etu, taka, vasen, oikea); käytetään tässä tapauksessa kuitenkin kokonaislukuja 1, 2, 3, 4, 5, 6 kuten alla:



Tällöin mikä tahansa kuution sivujen numerointi kokonaisluvuilla 1, 2, 3, 4, 5, 6 voidaan esittää joukon $\{1,2,3,4,5,6\}$ permutaationa π: sivutahkoon i kiinnitetty numero on $\pi(i)$ kaikilla $i = 1,2,3,4,5,6$.

Kuution symmetrian vuoksi tällöin oleellisesti sama kuutio esiintyy kuitenkin useampaan kertaan. Esimerkiksi

$$\pi(1) = 1, \quad \pi(2) = 2, \quad \pi(3) = 3, \quad \pi(4) = 4, \quad \pi(5) = 5, \quad \pi(6) = 6$$

on sama kuutio kuin

$$\pi'(1) = 2, \quad \pi'(2) = 6, \quad \pi'(3) = 3, \quad \pi'(4) = 4, \quad \pi'(5) = 1, \quad \pi'(6) = 5,$$

koska π' saadaan π:sta kiertämällä kuutiota sivujen 3 ja 4 keskipisteen läpi kulkevan akselin ympäri 90 astetta. Tämä vastaa sivutahkojen nimien permutaatiota $\gamma = (1,5,6,2)$. (Sivutahko i kiertyy sivutahkoksi $\gamma(i)$ kaikilla $i = 1,2,3,4,5,6$.)

Permutaatiot $(1,5,6,2)$ ja $(1,4,6,3)$ generoivat kuution sivutahkojen kaikki $6 \cdot 4 = 24$ kiertosymmetriaa:

$$G = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{I}, & (2,3,5,4), & (2,4,5,3), \\ (2,5)(3,4), & (1,2)(3,4)(5,6), & (1,2,3)(4,6,5), \\ (1,2,4)(3,6,5), & (1,2,6,5), & (1,3,2)(4,5,6), \\ (1,3,6,4), & (1,3)(2,5)(4,6), & (1,3,5)(2,6,4), \\ (1,4,2)(3,5,6), & (1,4,6,3), & (1,4)(2,5)(3,6), \\ (1,4,5)(2,6,3), & (1,5,6,2), & (1,5,4)(2,3,6), \\ (1,5,3)(2,4,6), & (1,5)(2,6)(3,4), & (1,6)(3,4), \\ (1,6)(2,3)(4,5), & (1,6)(2,4)(3,5), & (1,6)(2,5) \end{array} \right\}.$$

Kuution numeroinnit π ja π' ovat nyt symmetriaa vaille samat jos ja vain jos on olemassa $\gamma \in G$ siten, että $\pi' = \pi\gamma^{-1}$. Edellinen on ekvivalentti ehdon $\pi^{-1}\pi' \in G$ kanssa, joten saadaan, että numeroinnit π ja π' ovat samat jos ja vain jos ne kuuluvat samaan G:n vasempaan sivuluokkaan symmetrisessä ryhmässä $\mathsf{Sym}(\{1,2,3,4,5,6\})$.

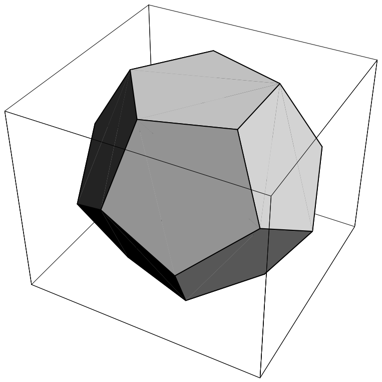
Ryhmän G sivuluokkien lukumääräksi ryhmässä $\mathsf{Sym}(\{1,2,3,4,5,6\})$ saadaan Lagrangen lauseen (kirja s. 193, Lause 6.2) perusteella

$$\frac{|\mathsf{Sym}(\{1,2,3,4,5,6\})|}{|G|} = \frac{6!}{24} = \frac{720}{24} = 30.$$

Sivuluokkien jokin vasen transversaali voidaan määrittää esimerkiksi kirjan algoritmilla 6.17 (s. 224), joka laskee juuri vasemman transversaalin; tätä ei erikseen mainita kirjassa.

$$\begin{array}{lll} [1,2,3,4,5,6], & [1,2,3,4,6,5], & [1,2,3,5,4,6], \\ [1,2,3,6,4,5], & [1,2,3,5,6,4], & [1,2,3,6,5,4], \\ [1,2,4,3,5,6], & [1,2,4,3,6,5], & [1,2,5,3,4,6], \\ [1,2,6,3,4,5], & [1,2,5,3,6,4], & [1,2,6,3,5,4], \\ [1,2,4,5,3,6], & [1,2,4,6,3,5], & [1,2,5,4,3,6], \\ [1,2,6,4,3,5], & [1,2,5,6,3,4], & [1,2,6,5,3,4], \\ [1,2,4,5,6,3], & [1,2,4,6,5,3], & [1,2,5,4,6,3], \\ [1,2,6,4,5,3], & [1,2,5,6,4,3], & [1,2,6,5,4,3], \\ [1,6,2,3,4,5], & [1,6,2,3,5,4], & [1,6,2,4,3,5], \\ [1,6,2,5,3,4], & [1,6,2,4,5,3], & [1,6,2,5,4,3]. \end{array}$$

Dodekaedri koostuu 12 5-kulmiosta (kuva alla), ja sen kiertosymmetriaryhmän koko on $12 \cdot 5 = 60$. (Kiinnitetään jokin dodekaedrin sivutahko ja sen naapuritahko. Mikä tahansa 12 sivutahkosta voidaan kiertää kiinnitetyn tahkon paikalle, jonka jälkeen naapuritahko voidaan valita 5 tavalla. Kaksi kiinnitettyä tahkoa määräävät yksikäsitteisesti käytetyn kierron.)



Dodekaedrille erilaisten numerointien määräksi saadaan siis

$$\frac{12!}{60} = \frac{479001600}{60} = 7983360.$$

Tehtävä 2

Olkoon P joukon $X = \{1, 2, \ldots, 19\}$ ositus

$$\{\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6, 7, 8, 9, 10\}, \{11, 12, 13, 14, 15\}, \{16, 17, 18, 19\}\}.$$

Kaikki joukon X annetut ehdot täyttävät ositukset voidaan selvästi muodostaa osituksesta P nimeämällä siinä esiintyvät pisteet uudestaan. Toisin sanoen, kaikkien ehdot täyttävien ositusten joukko on osituksen P rata ryhmän $G = \mathsf{Sym}(X)$ suhteen, missä permutaatio π operoi ositukseen P nimeämällä sen pisteet uudelleen. Esimerkiksi

$$P' = \{\{1, 3, 4, 5, 7\}, \{2, 6, 8, 10, 12\}, \{9, 11, 13, 14, 15\}, \{16, 17, 18, 19\}\}$$

saadaan P:stä vaihtamalla pisteet 2 ja 7 sekä 9 ja 12 keskenään, ts. $P' = \pi(P)$, missä $\pi = (2, 7)(9, 12)$.

Rata-stabiloijalauseen (kirja s. 213, Lemma 6.9) perusteella saadaan radan $G(P)$ pituudeksi

$$|G(P)| = \frac{|G|}{|G_P|},$$

missä G_P on se G:n aliryhmä, joka koostuu kaikista permutaatioista jotka stabiloivat osituksen P, ts.

$$G_P = \{\pi \in G \mid \pi(P) = P\}.$$

Nyt $|G_P| = 3!(5!)^3 4!$, koska osituksen P 4- ja 5-osajoukkojen sisältöjä saa permutoida mielivaltaisesti osituksen P muuttumatta; lisäksi 5-osajoukot voi järjestää keskenään 3! tavalla. Erilaisten ositusten lukumääräksi saadaan siis

$$|G(P)| = \frac{19!}{3!(5!)^3 4!} = \frac{121645100408832000}{248832000} = 488864376.$$

Tehtävä 3 (a)

Koska α kuvaa alkion 0 alkiolle 1, etsitään $h_0 \in \mathcal{U}_0$, joka kuvaa alkion 0 alkiolle 1. Sellainen löytyy: $h_0 = (0, 1, 3, 6)(2, 5, 9, 7)(4, 8)$. Kertomalla α tämän käänteispermutaatiolla saadaan $h_0^{-1}\alpha = (0)(1, 7, 9, 5, 3, 8, 4, 2)(6)$. Koska tässä 1 kuvautuu 7:lle, etsitään $h_1 \in \mathcal{U}_1$, joka kuvaa 1:n 7:lle. Sellainen löytyy: $h_1 = (1, 7, 3, 2, 6, 4)(5, 8, 9)$. Nyt $h_1^{-1}h_0^{-1}\alpha = (0)(1)(2, 4, 3, 5, 7, 8, 6)(9)$. Koska tässä 2 kuvautuu 4:lle, etsitään $h_2 \in \mathcal{U}_2$, joka kuvaa 2:n 4:lle. Sellaista ei löydy, joten $\alpha \notin G$.

Tehtävä 3 (b)

Koska β kuvaa alkion 0 alkiolle 1, etsitään $h_0 \in \mathcal{U}_0$, joka kuvaa alkion 0 alkiolle 1. Sellainen löytyy: $h_0 = (0, 1, 3, 6)(2, 5, 9, 7)(4, 8)$. Kertomalla β tämän käänteispermutaatiolla saadaan $h_0^{-1}\beta = (0)(1, 7, 4, 6, 9, 2)(3, 8, 5)$. Koska tässä 1 kuvautuu 7:lle, etsitään $h_1 \in \mathcal{U}_1$, joka kuvaa 1:n 7:lle. Sellainen löytyy: $h_1 = (1, 7, 3, 2, 6, 4)(5, 8, 9)$. Nyt $h_1^{-1}h_0^{-1}\beta = (0)(1)(2, 4)(3, 5, 7, 6, 8, 9)$. Koska tässä 2 kuvautuu 4:lle, etsitään $h_2 \in \mathcal{U}_2$, joka kuvaa 2:n 4:lle. Sellaista ei löydy, joten $\beta \notin G$.

Tehtävä 3 (c)

Koska γ kuvaa alkion 0 alkiolle 3, etsitään $h_0 \in \mathcal{U}_0$, joka kuvaa alkion 0 alkiolle 3. Sellainen löytyy: $h_0 = (0, 3)(1, 6)(2, 9)(5, 7)$. Kertomalla γ tämän käänteispermutaatiolla saadaan $h_0^{-1}\gamma = (0)(1, 2)(3, 7)(4, 6)(5, 8)(9)$. Koska tässä 1 kuvautuu 2:lle, etsitään $h_1 \in \mathcal{U}_1$, joka kuvaa 1:n 2:lle. Sellainen löytyy: $h_1 =$

$(1,2)(3,4)(6,7)$. Nyt $h_1^{-1}h_0^{-1}\gamma = (0)(1)(2)(3,6)(4,7)(5,8)(9)$. Tässä 2 kuvautuu 2:lle; etsitään $h_2 \in \mathcal{U}_2$, joka kuvaa 2:n 2:lle. Sellainen löytyy: $h_2 = \mathbf{I}$. Nyt $h_2^{-1}h_1^{-1}h_0^{-1}\gamma = (0)(1)(2)(3,6)(4,7)(5,8)(9)$. Koska tässä 3 kuvautuu 6:lle, etsitään $h_3 \in \mathcal{U}_3$, joka kuvaa 3:n 6:lle. Sellainen löytyy: $h_3 = (3,6)(4,7)(5,8)$. Nyt $h_3^{-1}h_2^{-1}h_1^{-1}h_0^{-1}\gamma = \mathbf{I}$. Tämä kuvaa kaikki alkiot itselleen, ja $\mathbf{I} \in \mathcal{U}_n$ kaikille $n \geq 4$, joten $\gamma \in G$.

Ryhmän G koko on $|\mathcal{U}_0| \cdot |\mathcal{U}_1| \cdot |\mathcal{U}_2| \cdot |\mathcal{U}_3| \cdot \ldots \cdot |\mathcal{U}_9| = 10 \cdot 6 \cdot 2 = 120$.

Kotitehtävä 3

Öljy koostuu suurelta osalta hiilivetymolekyyleistä. Hiilivetymolekyylit koostuvat hiili- ja vetyatomeista. Kuhunkin hiiliatomiin liittyy 4 ja kuhunkin vetyatomiin 1 sidos. Kahden hiiliatomin välillä voi olla myös kaksois- tai kolmoissidos, jolloin atomien muiden sidosten määrä on vastaavasti pienempi. Öljyn hiilivetyjen pituus vaihtelee suuresti; esimerkiksi bensiini sisältää lähinnä hiilivetyjä, joissa on 5–10 hiiliatomia[1].

Hiilivetymolekyylin hiiliatomien muodostama rakenne voidaan esittää yhtenäisenä multiverkkona, jonka solmut ovat hiiliatomeja ja jonka kaaret vastaavat hiiliatomien välisiä sidoksia. Multiverkko on verkko, jossa saman kaaren toistuminen sallitaan. Hiilivetyjä mallinnettaessa minkään solmun asteluku ei saa ylittää neljää, ja kaksois- ja kolmoissidokset voidaan mallintaa laittamalla kahden solmun välille enintään kolme kaarta. Tämä malli ei selvästikään ota huomioon esimerkiksi kolmiulotteisen geometrian rajoituksia.

Olkoon $d(v)$ solmun v asteluku. Kun $G = (V, E)$ kuvaa ylläesitettyyn tapaan hiilivetymolekyyliä, jossa on $|V|$ hiiliatomia, molekyylissä on $\sum_{v \in V}(4 - d(v)) = 4|V| - 2|E|$ vetyatomia. Kaksi hiilivetyä ovat isomeerejä, jos sekä hiili- että vetyatomien lukumäärä on sama.

Tehtävä

Pidetään kahta hiilivetyä isomorfisina, jos niitä vastaavat multiverkot ovat isomorfiset. Laadi tietokoneohjelma ja generoi sillä mahdollisimman suurelle n ei-isomorfiset hiilivedyt, joissa on enintään n hiiliatomia. Ryhmittele ei-isomorfiset hiilivedyt isomerialuokkiin ja ilmoita, montako hiilivetyä kuhunkin isomerialuokkaan kuuluu. Ilmoita lisäksi kustakin isomerialuokasta, kuinka moni luokan hiilivety on syklitön. Palautuksia arvioitaessa arvioidaan pikemminkin menetelmien tehokkuutta kuin saavutettuja tuloksia; yletöntä laskentaresurssien käyttöä ei pidetä meriittinä. Noin 1 h CPU-aikaa on riittävä suuruusluokka.

Vihjeitä ja apuohjelma

Ongelman ratkaisussa tarvittaneen keino laskea multiverkon kanoninen muoto. Kurssin kotisivulla tiedostossa `kotit3.c` on C-kielinen aliohjelma multiverkon kanonisen muodon laskemiseksi:

```
void canon(int vertices, char *s, char *canon);
```

[1] http://www.lloydminsterheavyoil.com/refining.htm

`canon` laskee multiverkon kanonisen muodon. Syötemultiverkko määritellään antamalla parametrissä `vertices` sen solmujen määrä ja parametrissä `s` merkkijono, joka määrittää itse multiverkon. Solmut numeroidaan `1...vertices` ja merkkijono

```
s=b_2,1 b_3,1 b_3,2 b_4,1 b_4,2 b_4,3 b_5,1 ... b_vertices,vertices-1
```

missä `b_j,i` on merkki, joka kuvaa, montako kaarta solmujen i ja j välillä on. Merkki '0' tarkoittaa 0 kaarta, merkki '1' yhtä kaarta jne. Aliohjelma muuntaa syötemerkkijonon verkoksi, laskee sen kanonisen muodon ja kirjoittaa merkkijonoon `canon` kanonista muotoa vastaavan merkkijonon. Käyttäjän tulee huolehtia muistin varaamisesta `canon`-merkkijonolle.

Tämä aliohjelma puolestaan käyttää Brendan McKayn `nauty`[2]-aliohjelmakirjastoa, jolla voi laskea verkon kanonisen muodon tai automorfismiryhmän. `kotit3.c`:n alussa rivi

```
#include "nauty22/nauty.h
```

olettaa, että `kotit3.c` on hakemistossa, jossa on `nauty`-alihakemisto `nauty22`. Rivi

```
#define MAXN 60
```

olettaa, että nautyllä käsiteltävissä verkoissa on enintään 60 solmua. Aliohjelmassa `canon` multiverkosta tehdään verkko siten, että jokaisesta solmusta ja jokaisesta kaaresta tehdään solmu, joten tarkasteltavassa multiverkossa solmuja ja kaaria saa olla yhteensä korkeintaan `MAXN` – tämä riittäisi ainakin 20-hiilisten hiilivetyjen tarkasteluun, joten sen ei pitäisi olla rajoittava tekijä.

`kotit3.c` sisältää myös minimaalisen pääohjelman, joka kutsuu kerran `canon`-aliohjelmaa. Ainakin Linux-alustalla kääntäminen onnistuu komennolla:

```
cc -o kotit3 kotit3.c nauty22/nauty.c nauty22/nautil.c nauty22/naugraph.c
```

Palautus

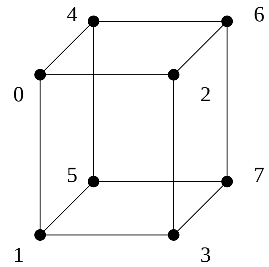
Palautukset sähköpostitse assistentille (`Emilia.Oikarinen@hut.fi`) viimeistään maanantaina 26.4.2004 esimerkiksi hyvälaatuisena PostScriptinä. Vastauksessa tulee olla kunkin isomerialuokan koko, kuvaus käytetyistä menetelmistä, ohjelmien *kommentoitu* lähdekoodi sekä yhteenveto tarvitusta laskenta-ajasta esim. n:n mukaan eroteltuna.

[2] http://cs.anu.edu.au/~bdm/nauty/

Laskuharjoitus 9

5.4.2004

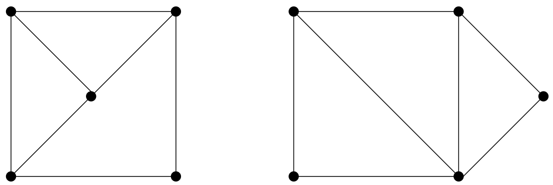
1. Olkoon $\mathcal{G}$ oheinen graafi.



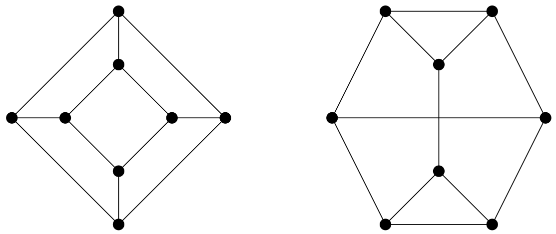
   Määritä osajoukkojen $\{0, 7\}$ ja $\{0, 1, 2, 3\}$ radat ja stabiloija-aliryhmät ryhmän $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})$ suhteen. Määritä lisäksi molempien stabiloija-aliryhmien jokin vasen transversaali ryhmän $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})$ suhteen. (Ryhmän $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})$ alkiot on listattu kirjan taulukossa 6.1, ja Schreier-Sims esitys esimerkissä 6.7.)

2. Osoita sopivan invariantin avulla, että allaolevat graafit eivät ole isomorfisia.

   (a)



   (b)



Laskuharjoituksen 9 vastaukset

Tehtävä 1

Graafin $\mathcal{G}$ automorfismiryhmässä $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})$ on 48 alkiota:

$\mathbf{I}$	$(0,2,3,1)(4,6,7,5)$	$(0,5,3)(2,4,7)$
$(2,4)(3,5)$	$(0,2,6,7,5,1)(3,4)$	$(0,5)(2,7)$
$(1,2)(5,6)$	$(0,3,6)(1,7,4)$	$(0,5,3,6)(1,7,2,4)$
$(1,2,4)(3,6,5)$	$(0,3,5,6)(1,7,4,2)$	$(0,5,6)(1,7,2)$
$(1,4,2)(3,5,6)$	$(0,3,6,5)(1,2,7,4)$	$(0,6,3)(1,4,7)$
$(1,4)(3,6)$	$(0,3)(1,2)(4,7)(5,6)$	$(0,6,3,5)(1,4,2,7)$
$(0,1,3,7,6,4)(2,5)$	$(0,3,5)(2,7,4)$	$(0,6,5,3)(1,2,4,7)$
$(0,1,3,2)(4,5,7,6)$	$(0,3)(4,7)$	$(0,6,5)(1,2,7)$
$(0,1,5,4)(2,3,7,6)$	$(0,4,6,7,3,1)(2,5)$	$(0,6)(1,7)(2,4)(3,5)$
$(0,1,5,7,6,2)(3,4)$	$(0,4,5,1)(2,6,7,3)$	$(0,6)(1,7)$
$(0,1)(2,3)(4,5)(6,7)$	$(0,4,6,2)(1,5,7,3)$	$(0,7)(1,6)(2,5)(3,4)$
$(0,1)(2,5)(3,4)(6,7)$	$(0,4)(1,5)(2,6)(3,7)$	$(0,7)(1,6)(2,3)(4,5)$
$(0,2,6,4)(1,3,7,5)$	$(0,4,5,7,3,2)(1,6)$	$(0,7)(1,5)(2,6)(3,4)$
$(0,2)(1,3)(4,6)(5,7)$	$(0,4)(1,6)(2,5)(3,7)$	$(0,7)(1,5,4,6,2,3)$
$(0,2,3,7,5,4)(1,6)$	$(0,5,6,3)(1,4,7,2)$	$(0,7)(1,3,2,6,4,5)$
$(0,2)(1,6)(3,4)(5,7)$	$(0,5)(1,4)(2,7)(3,6)$	$(0,7)(1,3)(2,5)(4,6)$

Ryhmän generoivat permutaatiot $(0,1,3,7,6,4)(2,5)$ ja $(0,1,3,2)(4,5,7,6)$. Stabiloija-aliryhmät voi määrittää joko algoritmisesti ensin generoimalla ryhmälle Schreier-Sims esityksen (huomaa, että kirjan algoritmissa 6.9 on painovirhe; errata löytyy osoitteesta `http://www.math.mtu.edu/~kreher/cages.html`) ja tämän jälkeen käymällä algoritmin 6.6 avulla ryhmän kaikki alkiot läpi ja tulostamalla ne, jotka kuvaavat joukot $\{0,7\}$ ja $\{0,1,2,3\}$ itselleen. Toisaalta ainakin joukon $\{0,7\}$ stabiloijat

$\mathbf{I}$	$(1,4,2)(3,5,6)$	$(0,7)(1,5)(2,6)(3,4)$
$(2,4)(3,5)$	$(1,4)(3,6)$	$(0,7)(1,5,4,6,2,3)$
$(1,2)(5,6)$	$(0,7)(1,6)(2,5)(3,4)$	$(0,7)(1,3,2,6,4,5)$
$(1,2,4)(3,6,5)$	$(0,7)(1,6)(2,3)(4,5)$	$(0,7)(1,3)(2,5)(4,6)$

on helppo poimia kaikkien ryhmän permutaatioiden listasta suoraan. Stabiloija-aliryhmän $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,7\}}$ koko on siis 12, joten joukon $\{0,7\}$ radan ja toisaalta stabiloijan vasemman transversaalin koko on

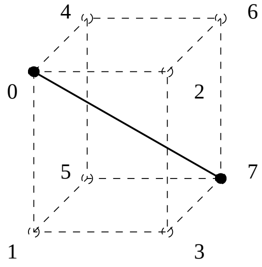
$$|\mathsf{Aut}(\mathcal{G})|/|\mathsf{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,7\}}| = 48/12 = 4.$$

Vasemman transversaalin voi määrittää esim. kirjan algoritmilla 6.17, joka laskee juuri vasemman transversaalin; tätä ei erikseen mainita kirjan tekstissä. Erääksi

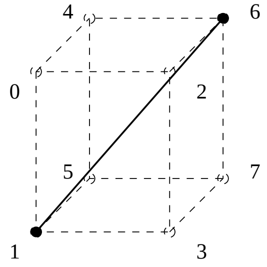
vasemmaksi transversaaliksi saadaan

$$\begin{array}{ll} g_1 = \mathbf{I} & g_3 = (0,2,6,4)(1,3,7,5) \\ g_2 = (0,1,3,7,6,4)(2,5) & g_4 = (0,3,6)(1,7,4) \end{array}.$$

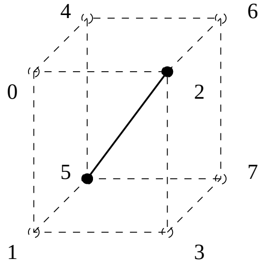
Osajoukon $\{0,7\}$ rata ja vastaava transversaali on esitetty alla.



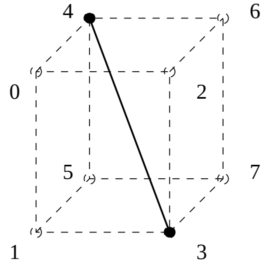
$\mathbf{I}$



(0,1,3,7,6)(2,5)



(0,2,6,4)(1,3,7,5)



(0,3,6)(1,7,4)

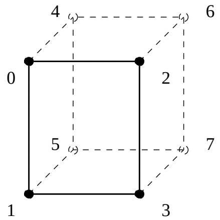
Vastaavasti osajoukon $\{0,1,2,3\}$ stabiloija-aliryhmä $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,1,2,3\}}$ koostuu permutaatioista

$$\begin{array}{ll} \mathbf{I} & (0,2)(1,3)(4,6)(5,7) \\ (1,2)(5,6) & (0,2,3,1)(4,6,7,5) \\ (0,1,3,2)(4,5,7,6) & (0,3)(1,2)(4,7)(5,6) \\ (0,1)(2,3)(4,5)(6,7) & (0,3)(4,7) \end{array},$$

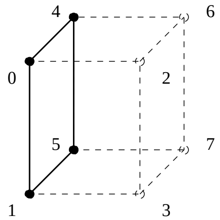
joten osajoukon $\{0,1,2,3\}$ radan pituus ja toisaalta $\mathsf{Aut}(\mathcal{G})_{\{0,1,2,3\}}$:n vasemman transversaalin koko on $48/8 = 6$. Eräs vasen transversaali koostuu permutaatioista

$$\begin{array}{lll} g_1 = \mathbf{I} & g_3 = (1,2,4)(3,6,5) & g_5 = (0,2,6,4)(1,3,7,5) \\ g_2 = (2,4)(5,3) & g_4 = (0,1,3,7,6,4)(2,5) & g_6 = (0,4)(1,5)(2,6)(3,7) \end{array}.$$

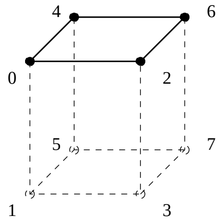
Osajoukon rata ja vastaavat transversaalin alkiot on esitetty alla.



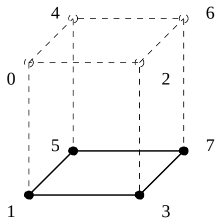
I



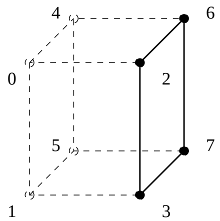
(2,4)(5,3)



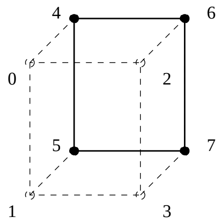
(1,2,4)(3,6,5)



(0,1,3,7,6,4)(2,5)



(0,2,6,4)(1,3,7,5)



(0,4)(1,5)(2,6)(3,7)

Tehtävä 2

Graafit $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ ja $\mathcal{G}_2 = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ ovat *isomorfisia* (merkintä: $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$) jos on olemassa bijektio $\pi : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ siten, että kaikilla $u, v \in \mathcal{V}_1$ pätee $\{u, v\} \in \mathcal{E}_1$ jos ja vain jos $\{\pi(u), \pi(v)\} \in \mathcal{E}_2$. Bijektio π on *isomorfismi*.

Olkoon $\mathcal{F}$ perhe graafeja ja X jokin joukko. Kuvaus $\Phi : \mathcal{F} \to X$ on *invariantti* perheelle $\mathcal{F}$ jos kaikille $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \in \mathcal{F}$ pätee $\Phi(\mathcal{G}_1) = \Phi(\mathcal{G}_2)$ aina kun $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$. Näin ollen jos $\Phi(\mathcal{G}_1) \neq \Phi(\mathcal{G}_2)$ niin on oltava $\mathcal{G}_1 \ncong \mathcal{G}_2$.

Tehtävän ratkaisemiseksi riittää siis löytää invariantti, joka erottelee annetut graafit toisistaan.

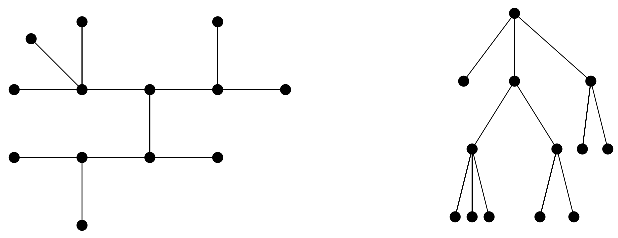
(a) Tällaiseksi kelpaa esimerkiksi graafin astelista (järjestettynä kasvavaan järjestykseen). Isomorfismin π on kuvattava graafin astelista $[\deg(v_1), \ldots, \deg(v_n)]$, kun $\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \cdots \leq \deg(v_n)$ vastaavalle listalle $[\deg(\pi(v_1)), \ldots, \deg(\pi(v_n))]$ siten, että $\deg(\pi(v_1)) \leq \deg(\pi(v_2)) \leq \cdots \leq \deg(\pi(v_n))$. Graafeissa täytyy siis olla yhtä monta solmua, että ne olisivat isomorfiset. Vasemmanpuoleiselle graafille astelista on $[2, 3, 3, 3, 3]$ ja oikeanpuoleiselle $[2, 2, 3, 3, 4]$. Graafit eivät siis ole isomorfiset.

(b) Tällainen on esimerkiksi kolmioiden lukumäärä graafissa: isomorfismin π on kuvattava mielivaltainen kolmio $\{\{u, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}\} \subseteq \mathcal{E}_1$ vastaavalle kolmiolle $\{\{\pi(u), \pi(v)\}, \{\pi(u), \pi(w)\}, \{\pi(v), \pi(w)\}\} \subseteq \mathcal{E}_2$, joten isomorfisissa graafeissa $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$ on oltava sama lukumäärä kolmioita. Nyt huomataan, että vasemmanpuoleisessa graafissa ei ole yhtään kolmiota, ja oikeanpuoleisessa graafissa on kaksi kolmiota. Näin ollen graafit eivät voi olla isomorfiset.

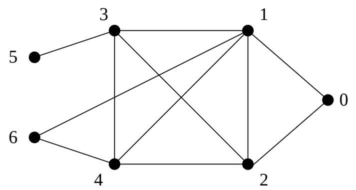
Laskuharjoitus 10

19.4.2004

1. Tutki ovatko oheiset puut isomorfisia laskemalla niille sertifikaatit.



2. Muunna edellisen tehtävän tuloksena saatu sertifikaatti takaisin puuksi.
3. Osita allaolevan graafin solmujoukko solmujen astelukujen mukaan, ja muodosta osituksen karkein tasasuhtainen hienonnus (coarsest equitable refinement).



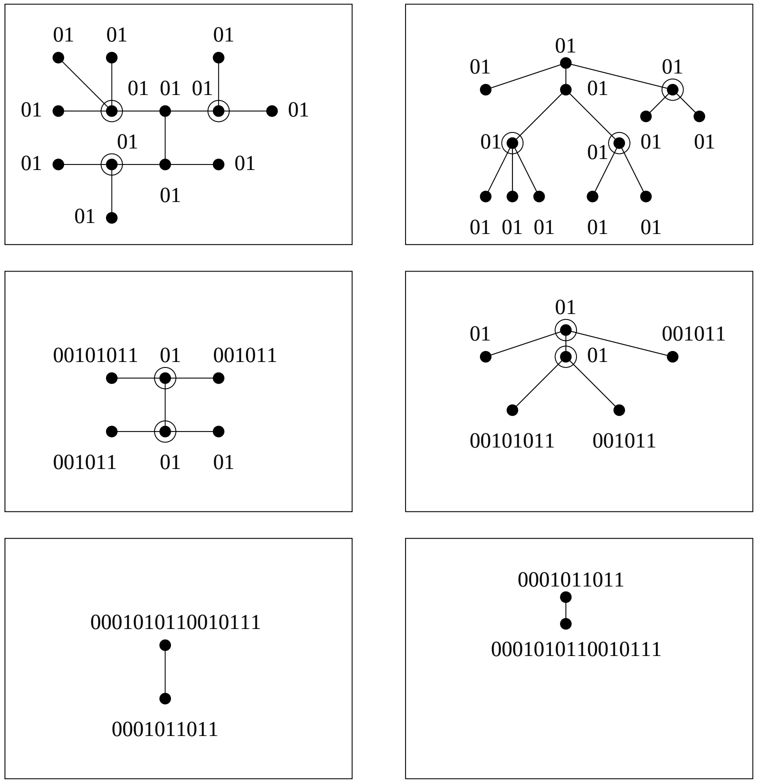
Laskuharjoituksen 10 vastaukset

Tehtävä 1

Käytetään kirjan kappaleessa 7.3.1. esitettyä algoritmia hieman tarkennettuna.

1. Nimeä puussa kaikki solmut 01:ksi.
2. Niin kauan kuin puussa on enemmän kuin kaksi solmua, toista seuraavaa.
   (a) Määritä kaikki ne ei-lehtisolmut, joilla on naapurina enintään yksi ei-lehtisolmu, ja aseta nämä solmut joukkoon T. (Puun solmu on lehtisolmu jos sillä on enintään yksi naapurisolmu.)
   (b) Tee kullekin $x \in T$ seuraavaa:
      i. Kerää joukkoon Y x:n naapurina olevien lehtisolmujen nimet sekä solmun x nimi, josta on poistettu alku-0 ja loppu-1.
      ii. Korvaa x:n nimi nimellä, joka saadaan järjestämällä Y:n alkiot leksikografiseen järjestykseen, liittämällä ne yhdeksi bittijonoksi, ja lisäämällä alkuun 0 ja loppuun 1.
      iii. Poista x:n naapurina olevat lehtisolmut.
3. Jos jäljellä on vain yksi solmu, sen nimi on puun sertifikaatti.
4. Jos jäljellä on kaksi solmua, niiden nimet leksikografisessa järjestyksessä yhteenliitettyinä muodostavat puun sertifikaatin.

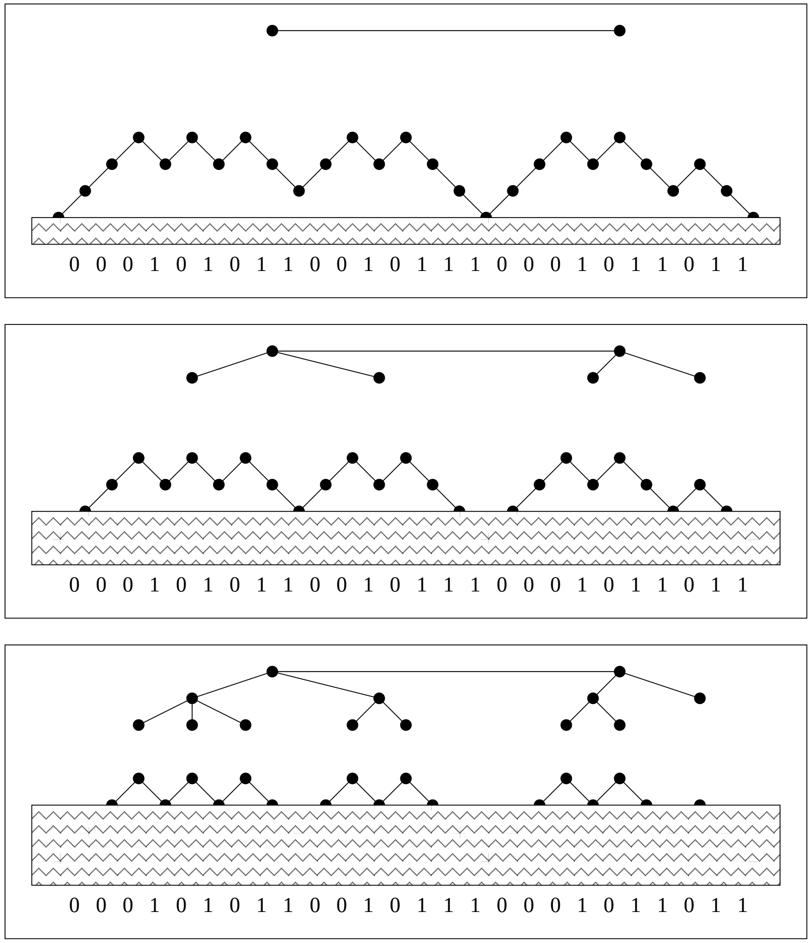
Algoritmin eteneminen tehtävässä annetuille puille on esitetty seuraavassa kuvassa. Ympyröidyt solmut ilmoittavat kulloinkin joukkoon T kuuluvat solmut.



Tuloksena saadaan molemmille puille sama sertifikaatti, joten puut ovat isomorfiset.

Tehtävä 2

Käytetään kirjassa esitettyä nousevan veden algoritmia (s. 248–252). Algoritmin kulku on esitetty seuraavassa kuvassa.



Tehtävä 3

Olkoon $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ tarkasteltava graafi. Merkitään solmun $v \in \mathcal{V}$ naapurisolmujen joukkoa $N_{\mathcal{G}}(v)$:llä. Määritellään osajoukolle $T \subseteq \mathcal{V}$:

$$D_T(v) = |N_{\mathcal{G}}(v) \cap T|,$$

ts. $D_T(v)$ on solmun v joukossa T olevien naapurisolmujen lukumäärä. Solmujoukon $\mathcal{V}$ ositus

$$B = [B[0], B[1], \ldots, B[|B|-1]]$$

on *tasasuhtainen* (equitable) jos kaikilla $i, j \in \{0, 1, \ldots, |B|-1\}$ pätee $D_{B[j]}(u) = D_{B[j]}(v)$ kaikilla $u, v \in B[i]$. Järjestetty ositus B on järjestettyä ositusta A *hienompi* jos

- jokaiselle osajoukolle $B[i]$ on olemassa osajoukko $A[j]$ siten, että $B[i] \subseteq A[j]$; ja
- jos $u \in A[i_1]$ ja $v \in A[j_1]$, missä $i_1 < j_1$, niin tällöin $u \in B[i_2]$, $v \in B[j_2]$, missä $i_2 < j_2$.

Kääntäen vastaavassa tilanteessa voidaan sanoa, että A on B:tä *karkeampi* ositus. B on aidosti hienompi (aidosti karkeampi) kuin A jos B on A:ta hienompi (karkeampi) ja lisäksi pätee $A \neq B$.

Olkoon A graafin solmujoukon järjestetty ositus. Ositukselle A on olemassa (osituksen komponenttien järjestystä vaille) yksikäsitteinen karkein tasasuhtainen ositus B, joka on hienompi kuin A. Allaoleva algoritmi löytää (erään) järjestetyn karkeimman tasasuhtaisen osituksen B, joka on hienompi kuin A.

1. Aseta $B = A$.
2. Tallenna B:n osajoukot järjestyksessä pinoon $\mathcal{S}$.
3. Toista kunnes $\mathcal{S} = \emptyset$:
   (a) Poista osajoukko T pinon $\mathcal{S}$ päältä.
   (b) Toista kaikille B:n osajoukoille $B[i]$:
      i. Aseta $L[h] = \{v \in B[i] \,:\, D_T(v) = h\}$ kaikilla $h = 0, 1, \ldots, |\mathcal{V}|-1$.
      ii. Jos L sisältää enemmän kuin yhden ei-tyhjän joukon, korvaa $B[i]$ ei-tyhjillä joukoilla $L[0], L[1], L[2], \ldots$, ja tallenna ko. ei-tyhjät joukot pinoon $\mathcal{S}$.

Tehtävän graafin solmujen asteluvut ovat

Solmu	0	1	2	3	4	5	6
Asteluku	2	5	4	4	4	1	2

Ositetaan solmut kasvavan asteluvun mukaiseen järjestykseen

$$A = [\{5\}, \{0, 6\}, \{2, 3, 4\}, \{1\}].$$

Suoritetaan annettua algoritmia askel kerrallaan. Alkutilassa

$$B = [\{\overset{0}{5}\}, \{\overset{1}{0}, \overset{1}{6}\}, \{\overset{1}{2}, \overset{1}{3}, \overset{1}{4}\}, \{\overset{0}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\{5\}, \{0, 6\}, \{2, 3, 4\}, \underbrace{\{1\}}_{=T}]$$

(kunkin B:n solmun v yläpuolelle on merkitty vastaava arvo $D_T(v)$). Selvästi mikään osituksen komponentti ei jakaannu, koska $D_T(v)$ on vakio kaikissa komponenteissa. Tilanne on vastaava seuraavalla askelella:

$$B = [\{\overset{1}{5}\}, \{\overset{1}{0}, \overset{1}{6}\}, \{\overset{2}{2}, \overset{2}{3}, \overset{2}{4}\}, \{\overset{3}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\{5\}, \{0, 6\}, \underbrace{\{2, 3, 4\}}_{=T}].$$

Kolmannella askelella komponentti $\{2, 3, 4\}$ jakaantuu osiin $\{3\}$ ja $\{2, 4\}$:

$$B = [\{\overset{0}{5}\}, \{\overset{0}{0}, \overset{0}{6}\}, \{\overset{1}{2}, \overset{0}{3}, \overset{1}{4}\}, \{\overset{2}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\{5\}, \underbrace{\{0, 6\}}_{=T}].$$

Nyt ositus säilyy muuttumattomana pinon $\mathcal{S}$ tyhjentymiseen asti:

$$B = [\{\overset{0}{5}\}, \{\overset{1}{0}, \overset{1}{6}\}, \{\overset{2}{3}\}, \{\overset{1}{2}, \overset{1}{4}\}, \{\overset{2}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\{5\}, \{3\}, \underbrace{\{2, 4\}}_{=T}].$$

$$B = [\{\overset{1}{5}\}, \{\overset{0}{0}, \overset{0}{6}\}, \{\overset{0}{3}\}, \{\overset{1}{2}, \overset{1}{4}\}, \{\overset{1}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\{5\}, \underbrace{\{3\}}_{=T}].$$

$$B = [\{\overset{0}{5}\}, \{\overset{0}{0}, \overset{0}{6}\}, \{\overset{1}{3}\}, \{\overset{0}{2}, \overset{0}{4}\}, \{\overset{0}{1}\}]$$
$$\mathcal{S} = [\underbrace{\{5\}}_{=T}].$$

Haluttu ositus on siis

$$B = [\{5\}, \{0, 6\}, \{3\}, \{2, 4\}, \{1\}].$$