Laskuharjoitus 8

22.3.2004

1. Kuinka monella toisistaan poikkeavalla tavalla voidaan numeroida kuution kuusi sivutahkoa, kun jokaiselle tahkolle annetaan oma numero? (Kuutio oletetaan täysin symmetriseksi, ja numeroiden asennolla sivutahkossa ei ole merkitystä.) Entäpä dodekaedrin 12 sivutahkoa?

2. Kuinka monella tavalla 19-joukko voidaan osittaa yhteen 4-alkioiseen osajoukkoon, ja kolmeen 5-alkioiseen osajoukkoon? Yksi tällainen ositus on esimerkiksi

$$\{\{1,2,3,4,5\},\{6,7,8,9,10\},\{11,12,13,14,15\},\{16,17,18,19\}\}.$$

3. Tutkitaan joukon $\{0,1,\ldots,9\}$ permutaatioryhmää G, jonka Schreier-Sims-esitys on

$$\overrightarrow{G} = (\beta : [\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_9]),$$

missä $\beta = \mathbf{I}$ ja

$$\mathcal{U}_0 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I},\ (0,1,3,6)(2,5,9,7)(4,8),\ (0,2,5,9,6)(1,4,8,3,7), \\ (0,3)(1,6)(2,9)(5,7),\ (0,4,9,6)(1,2,5,8)(3,7), \\ (0,5,6,2,9)(1,8,7,4,3),\ (0,6,9,5,2)(1,7,3,8,4), \\ (0,7,6)(1,2,8)(3,4,9),\ (0,8,4,1,9)(2,5,3,6,7), \\ (0,9,2,6,5)(1,3,4,7,8) \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I},\ (1,2)(3,4)(6,7),\ (1,3,6)(2,4,7)(5,9,8), \\ (1,4)(2,3)(6,7)(8,9),\ (1,6)(2,7)(5,9), \\ (1,7,3,2,6,4)(5,8,9) \end{array} \right\},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{\mathbf{I}\}, \qquad \mathcal{U}_3 = \{\mathbf{I},\ (3,6)(4,7)(5,8)\},$$

$$\mathcal{U}_4 = \mathcal{U}_5 = \mathcal{U}_6 = \mathcal{U}_7 = \mathcal{U}_8 = \mathcal{U}_9 = \{\mathbf{I}\}.$$

Mitkä seuraavista permutaatioista kuuluvat ryhmään G?

(a) $\alpha = (0,1,2,3,4,5,6)$

(b) β=$(0,1,2,3,4)(5,6,7,8,9)$

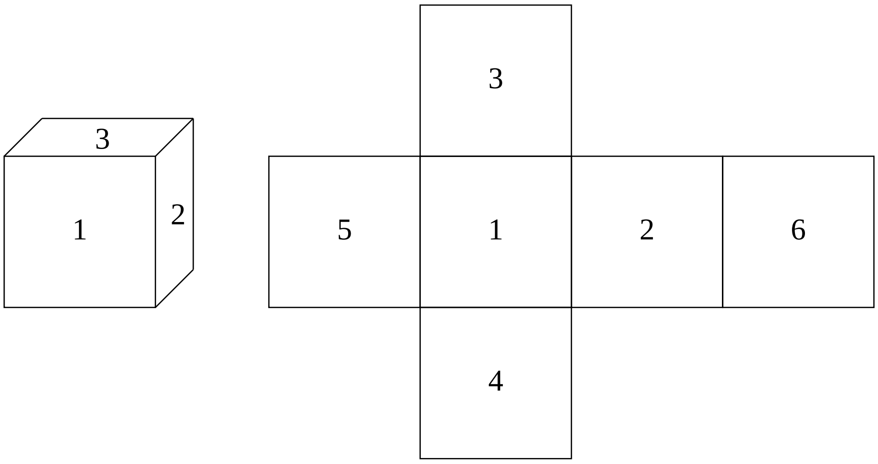
(c) γ=$(0,3,5,8,7)(1,9,2,6,4)$

Mikä on ryhmän G koko?

Laskuharjoituksen 8 vastaukset

Tehtävä 1

Nimetään aluksi kuution kuusi sivutahkoa jollakin tavalla (esim. kansi, pohja, etu, taka, vasen, oikea); käytetään tässä tapauksessa kuitenkin kokonaislukuja 1, 2, 3, 4, 5, 6 kuten alla:



Tällöin mikä tahansa kuution sivujen numerointi kokonaisluvuilla 1, 2, 3, 4, 5, 6 voidaan esittää joukon $\{1,2,3,4,5,6\}$ permutaationa π: sivutahkoon i kiinnitetty numero on $\pi(i)$ kaikilla $i = 1,2,3,4,5,6$.

Kuution symmetrian vuoksi tällöin oleellisesti sama kuutio esiintyy kuitenkin useampaan kertaan. Esimerkiksi

$$\pi(1) = 1, \quad \pi(2) = 2, \quad \pi(3) = 3, \quad \pi(4) = 4, \quad \pi(5) = 5, \quad \pi(6) = 6$$

on sama kuutio kuin

$$\pi'(1) = 2, \quad \pi'(2) = 6, \quad \pi'(3) = 3, \quad \pi'(4) = 4, \quad \pi'(5) = 1, \quad \pi'(6) = 5,$$

koska π' saadaan π:sta kiertämällä kuutiota sivujen 3 ja 4 keskipisteen läpi kulkevan akselin ympäri 90 astetta. Tämä vastaa sivutahkojen nimien permutaatiota $\gamma = (1,5,6,2)$. (Sivutahko i kiertyy sivutahkoksi $\gamma(i)$ kaikilla $i = 1,2,3,4,5,6$.)

Permutaatiot $(1,5,6,2)$ ja $(1,4,6,3)$ generoivat kuution sivutahkojen kaikki $6 \cdot 4 = 24$ kiertosymmetriaa:

$$G = \left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{I}, & (2,3,5,4), & (2,4,5,3), \\ (2,5)(3,4), & (1,2)(3,4)(5,6), & (1,2,3)(4,6,5), \\ (1,2,4)(3,6,5), & (1,2,6,5), & (1,3,2)(4,5,6), \\ (1,3,6,4), & (1,3)(2,5)(4,6), & (1,3,5)(2,6,4), \\ (1,4,2)(3,5,6), & (1,4,6,3), & (1,4)(2,5)(3,6), \\ (1,4,5)(2,6,3), & (1,5,6,2), & (1,5,4)(2,3,6), \\ (1,5,3)(2,4,6), & (1,5)(2,6)(3,4), & (1,6)(3,4), \\ (1,6)(2,3)(4,5), & (1,6)(2,4)(3,5), & (1,6)(2,5) \end{array} \right\}.$$

Kuution numeroinnit π ja π' ovat nyt symmetriaa vaille samat jos ja vain jos on olemassa $\gamma \in G$ siten, että $\pi' = \pi\gamma^{-1}$. Edellinen on ekvivalentti ehdon $\pi^{-1}\pi' \in G$ kanssa, joten saadaan, että numeroinnit π ja π' ovat samat jos ja vain jos ne kuuluvat samaan G:n vasempaan sivuluokkaan symmetrisessä ryhmässä $\mathsf{Sym}(\{1,2,3,4,5,6\})$.

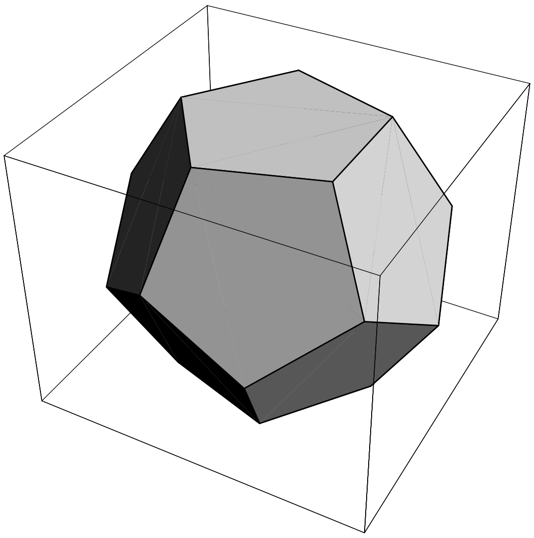
Ryhmän G sivuluokkien lukumääräksi ryhmässä $\mathsf{Sym}(\{1,2,3,4,5,6\})$ saadaan Lagrangen lauseen (kirja s. 193, Lause 6.2) perusteella

$$\frac{|\mathsf{Sym}(\{1,2,3,4,5,6\})|}{|G|} = \frac{6!}{24} = \frac{720}{24} = 30.$$

Sivuluokkien jokin vasen transversaali voidaan määrittää esimerkiksi kirjan algoritmilla 6.17 (s. 224), joka laskee juuri vasemman transversaalin; tätä ei erikseen mainita kirjassa.

$$\begin{array}{lll} [1,2,3,4,5,6], & [1,2,3,4,6,5], & [1,2,3,5,4,6], \\ [1,2,3,6,4,5], & [1,2,3,5,6,4], & [1,2,3,6,5,4], \\ [1,2,4,3,5,6], & [1,2,4,3,6,5], & [1,2,5,3,4,6], \\ [1,2,6,3,4,5], & [1,2,5,3,6,4], & [1,2,6,3,5,4], \\ [1,2,4,5,3,6], & [1,2,4,6,3,5], & [1,2,5,4,3,6], \\ [1,2,6,4,3,5], & [1,2,5,6,3,4], & [1,2,6,5,3,4], \\ [1,2,4,5,6,3], & [1,2,4,6,5,3], & [1,2,5,4,6,3], \\ [1,2,6,4,5,3], & [1,2,5,6,4,3], & [1,2,6,5,4,3], \\ [1,6,2,3,4,5], & [1,6,2,3,5,4], & [1,6,2,4,3,5], \\ [1,6,2,5,3,4], & [1,6,2,4,5,3], & [1,6,2,5,4,3]. \end{array}$$

Dodekaedri koostuu 12 5-kulmiosta (kuva alla), ja sen kiertosymmetriaryhmän koko on $12 \cdot 5 = 60$. (Kiinnitetään jokin dodekaedrin sivutahko ja sen naapuritahko. Mikä tahansa 12 sivutahkosta voidaan kiertää kiinnitetyn tahkon paikalle, jonka jälkeen naapuritahko voidaan valita 5 tavalla. Kaksi kiinnitettyä tahkoa määräävät yksikäsitteisesti käytetyn kierron.)



Dodekaedrille erilaisten numerointien määräksi saadaan siis

$$\frac{12!}{60} = \frac{479001600}{60} = 7983360.$$

Tehtävä 2

Olkoon P joukon $X = \{1, 2, \ldots, 19\}$ ositus

$$\{\{1,2,3,4,5\},\{6,7,8,9,10\},\{11,12,13,14,15\},\{16,17,18,19\}\}.$$

Kaikki joukon X annetut ehdot täyttävät ositukset voidaan selvästi muodostaa osituksesta P nimeämällä siinä esiintyvät pisteet uudestaan. Toisin sanoen, kaikkien ehdot täyttävien ositusten joukko on osituksen P rata ryhmän $G = \mathsf{Sym}(X)$ suhteen, missä permutaatio π operoi ositukseen P nimeämällä sen pisteet uudelleen. Esimerkiksi

$$P' = \{\{1,3,4,5,7\},\{2,6,8,10,12\},\{9,11,13,14,15\},\{16,17,18,19\}\}$$

saadaan P:stä vaihtamalla pisteet 2 ja 7 sekä 9 ja 12 keskenään, ts. $P' = \pi(P)$, missä $\pi = (2,7)(9,12)$.

Rata-stabiloijalauseen (kirja s. 213, Lemma 6.9) perusteella saadaan radan $G(P)$ pituudeksi

$$|G(P)| = \frac{|G|}{|G_P|},$$

missä G_P on se G:n aliryhmä, joka koostuu kaikista permutaatioista jotka stabiloivat osituksen P, ts.

$$G_P = \{\pi \in G \mid \pi(P) = P\}.$$

Nyt $|G_P| = 3!(5!)^3 4!$, koska osituksen P 4- ja 5-osajoukkojen sisältöjä saa permutoida mielivaltaisesti osituksen P muuttumatta; lisäksi 5-osajoukot voi järjestää keskenään 3! tavalla. Erilaisten osituksien lukumääräksi saadaan siis

$$|G(P)| = \frac{19!}{3!(5!)^3 4!} = \frac{121645100408832000}{248832000} = 488864376.$$

Tehtävä 3 (a)

Koska α kuvaa alkion 0 alkiolle 1, etsitään $h_0 \in \mathcal{U}_0$, joka kuvaa alkion 0 alkiolle 1. Sellainen löytyy: $h_0 = (0,1,3,6)(2,5,9,7)(4,8)$. Kertomalla α tämän käänteispermutaatiolla saadaan $h_0^{-1}\alpha = (0)(1,7,9,5,3,8,4,2)(6)$. Koska tässä 1 kuvautuu 7:lle, etsitään $h_1 \in \mathcal{U}_1$, joka kuvaa 1:n 7:lle. Sellainen löytyy: $h_1 = (1,7,3,2,6,4)(5,8,9)$. Nyt $h_1^{-1}h_0^{-1}\alpha = (0)(1)(2,4,3,5,7,8,6)(9)$. Koska tässä 2 kuvautuu 4:lle, etsitään $h_2 \in \mathcal{U}_2$, joka kuvaa 2:n 4:lle. Sellaista ei löydy, joten $\alpha \notin G$.

Tehtävä 3 (b)

Koska β kuvaa alkion 0 alkiolle 1, etsitään $h_0 \in \mathcal{U}_0$, joka kuvaa alkion 0 alkiolle 1. Sellainen löytyy: $h_0 = (0,1,3,6)(2,5,9,7)(4,8)$. Kertomalla β tämän käänteispermutaatiolla saadaan $h_0^{-1}\beta = (0)(1,7,4,6,9,2)(3,8,5)$. Koska tässä 1 kuvautuu 7:lle, etsitään $h_1 \in \mathcal{U}_1$, joka kuvaa 1:n 7:lle. Sellainen löytyy: $h_1 = (1,7,3,2,6,4)(5,8,9)$. Nyt $h_1^{-1}h_0^{-1}\beta = (0)(1)(2,4)(3,5,7,6,8,9)$. Koska tässä 2 kuvautuu 4:lle, etsitään $h_2 \in \mathcal{U}_2$, joka kuvaa 2:n 4:lle. Sellaista ei löydy, joten $\beta \notin G$.

Tehtävä 3 (c)

Koska γ kuvaa alkion 0 alkiolle 3, etsitään $h_0 \in \mathcal{U}_0$, joka kuvaa alkion 0 alkiolle 3. Sellainen löytyy: $h_0 = (0,3)(1,6)(2,9)(5,7)$. Kertomalla γ tämän käänteispermutaatiolla saadaan $h_0^{-1}\gamma = (0)(1,2)(3,7)(4,6)(5,8)(9)$. Koska tässä 1 kuvautuu 2:lle, etsitään $h_1 \in \mathcal{U}_1$, joka kuvaa 1:n 2:lle. Sellainen löytyy: $h_1 =$

$(1,2)(3,4)(6,7)$. Nyt $h_1^{-1}h_0^{-1}\gamma = (0)(1)(2)(3,6)(4,7)(5,8)(9)$. Tässä 2 kuvautuu 2:lle; etsitään $h_2 \in \mathcal{U}_2$, joka kuvaa 2:n 2:lle. Sellainen löytyy: $h_2 = \mathbf{I}$. Nyt $h_2^{-1}h_1^{-1}h_0^{-1}\gamma = (0)(1)(2)(3,6)(4,7)(5,8)(9)$. Koska tässä 3 kuvautuu 6:lle, etsitään $h_3 \in \mathcal{U}_3$, joka kuvaa 3:n 6:lle. Sellainen löytyy: $h_3 = (3,6)(4,7)(5,8)$. Nyt $h_3^{-1}h_2^{-1}h_1^{-1}h_0^{-1}\gamma = \mathbf{I}$. Tämä kuvaa kaikki alkiot itselleen, ja $\mathbf{I} \in \mathcal{U}_n$ kaikille $n \geq 4$, joten $\gamma \in G$.

Ryhmän G koko on $|\mathcal{U}_0| \cdot |\mathcal{U}_1| \cdot |\mathcal{U}_2| \cdot |\mathcal{U}_3| \cdot \ldots \cdot |\mathcal{U}_9| = 10 \cdot 6 \cdot 2 = 120$.