Laskuharjoitus 7

15.03.2004

1. Esitä joitakin sopivia tabuehtoja seuraavien harjoituksessa 5 esiteltyjen optimointitehtävien kanssa käytettäväksi (naapuristo ja kohdefunktio kuin harjoituksessa 5).

   (a) Symmetrinen kauppamatkustajan ongelma.

   (b) Graafin väritys n värillä siten, että naapurisolmuilla on eri väri.

   (c) Graafin ositus: Jaa graafin solmut, joita on parillinen määrä, kahteen yhtäsuureen osaan siten, että osien välisten kaarien määrä on mahdollisimman pieni.

   (d) Lukujen ositus: jaa joukko $A = \{a_{1,}a_{2,}, \ldots, a_n\}$ kahteen osaan A_1 ja A_2 siten, että $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ja

$$\sum_{a \in A_1} a = \sum_{a \in A_2} a.$$

2. Olkoon G ei-tyhjä joukko ja $(g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$ ehdot (a)–(c) täyttävä kuvaus joukolta $G \times G$ joukolle G.

   (a) kaikilla $g_1, g_2, g_3 \in G$ pätee $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.

   (b) on olemassa alkio $1 \in G$, jolle pätee $g \cdot 1 = g$ kaikilla $g \in G$.

   (c) kaikilla $g \in G$ on olemassa alkio $g^{-1} \in G$, jolle $g^{-1} \cdot g = 1$.

   Osoita, että alkio $1 \in G$ ei tällöin ole välttämättä yksikäsitteinen.

   Entä jos (b) korvataan ehdolla "on olemassa alkio $1 \in G$, jolle pätee $1 \cdot g = g$ kaikilla $g \in G$" ?

3. Olkoon G äärellinen ryhmä, H ryhmän G aliryhmä, ja K ryhmän H aliryhmä. Olkoon $\{g_1, \ldots, g_n\}$ ryhmän H vasen transversaali ryhmän G suhteen, ja olkoon $\{h_1, \ldots, h_m\}$ ryhmän K vasen transversaali ryhmän H suhteen. Osoita, että mielivaltainen $g \in G$ voidaan aina esittää muodossa $g = g_i \cdot h_j \cdot k$, missä $k \in K$ ja $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$.

Laskuharjoituksen 7 vastaukset

Tehtävä 1

Kuten laskuharjoituksessa 5, tässäkään esitetyt ratkaisut eivät välttämättä ole kaikissa tapauksissa parhaita mahdollisia. On syytä kokeilla erilaisia ratkaisuja ja valita se, joka toimii tarkasteltavissa ongelmainstansseissa parhaiten.

(a) Esimerkiksi: Lisättyä kaarta ei saa poistaa seuraavalla n askeleella. Poistettua kaarta ei saa lisätä seuraavalla m askeleella. Parametrit n ja m täytyy virittää sopiviksi ongelmainstanssista riippuen.

(b) Esimerkiksi: Jos solmun väri on muutettu esim. väristä v_i väriin v_j, ei sitä saa muuttaa seuraavalla n kierroksella väriin v_i. Vaihtoehtoisesti: Jos solmun v väriä on muutettu, ei solmun v väriin saa koskea seuraavalla n kierroksella. Tämä rajoittaa hakua enemmän kuin edellinen ehto.

(c) Jos solmut v_1 ja v_2 on vaihdettu keskenään, niin tätä paria ei saa vaihtaa uudelleen seuraavan n:n kierroksen aikana. Vaihtoehtoisesti: Jos v on siirretty osituksesta toiseen, niin sitä ei saa siirtää seuraavan n kierroksen aikana.

(d) Jos $k = 1$, voidaan käyttää suoraan edellisen kohdan tabuehtoja.

Jos $k > 1$, on tilanne mutkikkaampi: voidaan käyttää samaa tabulistaa kuin edellä, mutta se saattaa rajoittaa valittavia siirtoja liikaa. Yksi mahdollisuus olisi tarkastella summaa $S_1 = \sum_{a \in A_1} a$. Jos jonkin siirron jälkeen $S_1 = x$, seuraavan n:n kierroksen ajan sellaiset siirrot, joiden jälkeen $S_1 = x$, ovat kiellettyjä. Tämä taas ei toimi silloin jos S_1:llä on vain muutamia mahdollisia arvoja.

Tehtävä 2

Olkoon G mielivaltainen ei-tyhjä joukko ja määritellään laskutoimitus $(g_1, g_2) \mapsto g_1$. Laskutoimitus on selvästi assosiatiivinen (ehto (a)), koska

$$(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot g_2 = g_1 = g_1 \cdot g_2 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3).$$

Valitaan nyt alkioksi 1 mielivaltainen joukon G alkio. Ehto (b) on voimassa, koska selvästi on $g \cdot 1 = g$ kaikilla $g \in G$. Toisaalta ehto (c) on voimassa, koska voidaan asettaa $g^{-1} := 1$ kaikille $g \in G$. Näin ollen jos G:ssä on vähintään 2 alkiota ykkösalkio ei ole yksikäsitteinen.

Jos ehto (b) muutetaan muotoon “on olemassa alkio $1 \in G$, jolle pätee $1 \cdot g = g$ kaikilla $g \in G$“ voidaan ykkösalkio osoittaa yksikäsitteiseksi: Valitaan mielivaltainen $g \in G$ ja otetaan käyttöön lyhennysmerkinnät $g_1 g_2 := g_1 \cdot g_2$, $g' := g^{-1}$ ja $g'' := (g^{-1})^{-1}$. Nyt saadaan ehtojen (a–c) perusteella

$$g1 = 1(g1) = (1g)1 = ((g''g')g)1 = (g''(g'g))1 = (g''1)1 =$$

$$= g''(11) = g''1 = g''(g'g) = (g''g')g = 1g = g,$$

joten $1g = g1 = g$ kaikilla $g \in G$. Näin ollen jos on olemassa alkiot $1 \in G$ ja $1' \in G$, jotka molemmat täyttävät ehdot (b) ja (c), voidaan päätellä $1' = 11' = 1$. Kun ykkösalkio on todettu yksikäsitteiseksi, voidaan vasen käänteisalkio osoittaa myös oikeaksi käänteisalkioksi käyttämällä aksioomia (a–c):

$$gg' = g(1g') = (g1)g' = (g(g'g))g' = ((gg')g)g' = (gg')(gg'),$$

joten on oltava $gg' = 1$. Nyt käänteisalkion yksikäsitteisyys voidaan todeta seuraavasti:

$$g' = g'1 = g'(g\hat{g}') = (g'g)\hat{g}' = 1\hat{g}' = \hat{g}'.$$

Tehtävä 3

Jos H on äärellisen ryhmän G aliryhmä ja $\{g_1, \ldots, g_n\}$ryhmän H vasen transversaali G, niin määritelmän mukaan joukko $\{g_1H, \ldots, g_nH\}$, missä $g_iH := \{g_ih \mid h \in H\}$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, on joukon G ositus (G:n jako ei-tyhjiin pistevieraisiin osajoukkoihin). Valitaan nyt jokin $g \in G$. Koska joukot g_iH osittavat joukon G, on olemassa yksikäsitteinen i, jolle $g \in g_iH$. Edelleen on olemassa yksikäsitteinen $h \in H$ jolle $g = g_ih$, koska jos on $g_ih = g = g_ih'$, voidaan päätellä

$$h = 1h = (g_i^{-1}g_i)h = g_i^{-1}(g_ih) = g_i^{-1}(g_ih') = (g_i^{-1}g_i)h' = 1h' = h'.$$

Näin ollen jokainen $g \in G$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa g_ih, missä $h \in H$. Vastaavalla päättelyllä voidaan nyt todeta, että em. esityksen $h \in H$ voidaan esittää yksikäsitteisesti muodossa $h = h_jk$, missä $k \in K$ ja $h_j \in \{h_1, \ldots, h_m\}$. Päättelyä voitaisiin selvästi jatkaa myös tästä eteenpäin jos K:lla olisi aliryhmä jne.

Edellisen kaltaisesta esityksestä on hyötyä, jos halutaan esimerkiksi käsitellä äärellisiä ryhmiä tietokoneella. Tällöin ryhmää voidaan käsitellä kokoelmana transversaaleja tietyn aliryhmäketjun suhteen. Esim. Schreier-Sims esityksessä (kirjan kappale 6.2.3) aliryhmäketju koostuu sisäkkäisistä pisteen stabiloija-aliryhmistä.