Laskuharjoitus 5

23.2.2004

1. Esitä jokin mielekäs kustannusfunktio ja naapuristo seuraaville vaikeille kombinatorisille optimointiongelmille.

   (a) Symmetrinen kauppamatkustajan ongelma.

   (b) Graafin väritys n värillä siten, että naapurisolmuilla on eri väri.

   (c) Graafin ositus: Jaa graafin solmut, joita on parillinen määrä, kahteen yhtäsuureen osaan siten, että osien välisten kaarien määrä on mahdollisimman pieni.

   (d) Lukujen ositus: jaa joukko $A = \{a_{1,}a_{2,} \ldots, a_n\}$ kahteen osaan A_1 ja A_2 siten, että $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ja

   $$\sum_{a \in A_1} a = \sum_{a \in A_2} a.$$

2. Etsi graafi, ja sille käypä ositus $[X_1, X_2]$ ($|X_1| = |X_2|$), joka on lokaali optimi (kun naapuristona on yhden solmun vaihtaminen X_1:stä X_2:teen ja päinvastoin), mutta joka ei ole globaali optimi (parempi käypä ratkaisu löytyy vaihtamalla kaksi solmua X_1:stä X_2:teen).

3. Esitä simuloitua jäähdytystä käyttävä algoritmi maksimiklikki ongelmalle.

Laskuharjoituksen 5 vastaukset

Tehtävä 1 (a)

Kustannusfunktiona luonnollisin valinta on reitin pituus. Eräs mahdollisuus naapuristoksi on ns. 2-OPT -siirrot: muodostetaan nykyistä reittiä kuvaavasta graafista uusi reitti poistamalla kaksi kaarta ja lisäämällä kaksi kaarta.

Tehtävä 1 (b)

Tässä kuvataan ns. fixed-k lähestymistapa. Ratkaisu on mikä tahansa solmujen ositus k osaan (tyhjät osat sallitaan). Kaksi väritystä ovat toistensa naapurit, jos toinen saadaan toisesta siirtämällä jokin solmu osasta toiseen. Kustannusfunktiona esim. niiden kaarien lukumäärä, joiden molemmat solmut ovat samassa osituksen osassa. Naapuristoa voidaan rajoittaa seuraavasti: nykyistä ratkaisua voidaan muuttaa vain niiden solmujen osalta, joista lähtee ainakin yksi väritysehtoa rikkova kaari; tällöin tosin naapuristo ei enää ole symmetrinen.

Tehtävä 1 (c)

Yksinkertainen lähestymistapa: ratkaisujoukkona on kaikki solmujen ositukset kahteen osaan. Siirto on kahden solmun vaihto osien välillä. Kustannusfunktiona kaarien määrä osien välillä.

Parempi suorituskyky on saatu simuloidulla jäähdytyksellä, kun on sallittu mielivaltaiset ositukset kahteen osaan V_1 ja V_2. Siirtoina on nyt yhden solmun siirto osasta toiseen, ja kustannusfunktiossa on lisäksi sakkona summatermi

$$\alpha(|V_1| - |V_2|)^2,$$

joka lisää kustannusta aina kun osat ovat erikokoiset. Optimointialgoritmi saattaa sakkotermistä huolimatta päätyä epätasapainoiseen ratkaisuun, jolloin voidaan joko kasvattaa α:n arvoa tai lisätä jokin yksinkertainen heuristiikka, joka muutamaa solmua siirtämällä pääsee tasapainotettuun ratkaisuun.

Tehtävä 1 (d)

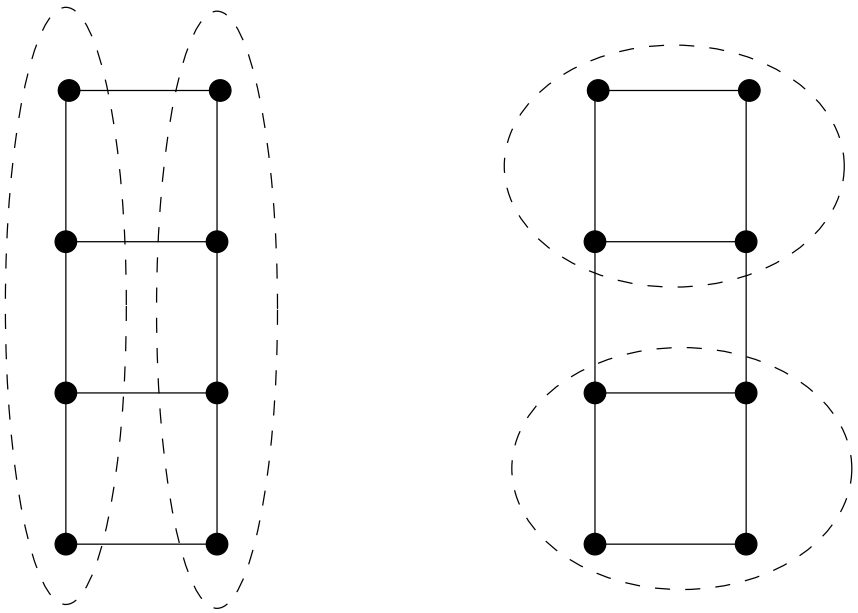
Otetaan ratkaisujoukoksi kaikki ositukset kahteen osaan. Määritellään k-naapuristo sellaiseksi, jossa yhdellä siirrolla saadaan siirtää enintään k alkiota osituksesta toiseen. Kustannusfunktioksi voidaan ottaa

$$\left| \sum_{a \in A_1} a - \sum_{a \in A_2} a \right|.$$

Tämä ongelma on hiukan hankala sikäli, että siinä on pahimmillaan hyvin paljon lokaaleja optimeja. Simuloitu jäähdytys esitetyllä naapuristolla ei pärjää erityisesti tähän ongelmaan kehitetylle Karmarkar-Karp -heuristiikalle, mutta parempaa on kehitetty.

Tehtävä 2

Vasemmalla graafin ositus, joka on lokaali optimi, josta ei yhden solmun osasta toiseen siirrolla päästä globaaliin optimiin (kuvassa oikealla), johon päästään siirtämällä kaksi solmua osasta toiseen.



Tehtävä 3

Maksimiklikin etsivä simuloitua jäähdytystä käyttävä algoritmi on esitetty pseudokoodilla seuraavasti:

```
Find_Max_Clique(G, c_max, T_0, α)
    c = 0
    T = T_0
    Choose feasible X ∈ 𝒳
    X_best = X
    while c ≤ c_max
            Y = h_N(X)
            if Y ≠ Fail
                    if |Y| > |X|
                            X = Y
                            if |X| > |X_best|
                                    X_best = X
                    else
                            r = random(0, 1)
                            if r < e^((|Y|−|X|)/T)
                                    X = Y
            c = c + 1
            T = αT
    return X_best
```

Jäähdytys tapahtuu lineaarisesti, ja α, c_{max} ja T_0 pitää valita sopivasti. Joukkona $\mathcal{X}$ on G:n aligraafien joukko ja $X \in \mathcal{X}$ on käypä, jos sen on klikki (eli kaikilla $x, y \in X, x \neq y$ on X:ssä kaari x:n ja y:n välillä). Kohdefunktiona on klikin (eli aligraafin) koko. X:n naapuristoksi $N(X)$ voidaan valita (esimerkiksi) G:n aligraafit, jotka saadaan lisäämällä tai poistamalla X:stä yksi solmu ja siihen liittyvät kaaret. Heuristiikkana h_N voidaan käyttää esimerkiksi valintaa "jokin käypä $Y \in N(X)$".