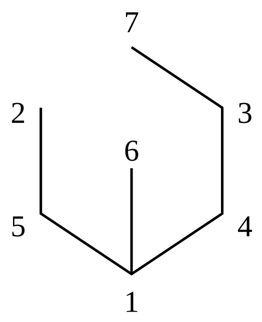
Laskuharjoitus 3

9.2.2004

1. Määritä osituksen $1 + 3 + 4 + 6 + 6 + 8$ rsf-lex rank ja seuraaja.

2. Kuinka monella tavalla 20 henkilöä voidaan jakaa viiteen ryhmään, jos vaaditaan, että mitkään kaksi ryhmää eivät ole saman kokoisia. (Huomaa, että ryhmä voi olla myös tyhjä.)

3. (a) Anna alla olevan nimetyn puun Prüferin listaesitys.



   (b) Minkä nimetyn puun Prüferin listaesitys on $[5, 5, 4, 3, 2]$?

4. Neljän termin tulo $abcd$ voidaan ryhmitellä kahden termin tuloiksi viidellä erilaisella tavalla:

$$((ab)c)d, \quad (a(bc))d, \quad a((bc)d), \quad a(b(cd)), \quad (ab)(cd).$$

   Yleisessä tapauksessa tulossa on $n + 1$ termiä. Esitä bijektio erilaisten kahden termin tuloiksi ryhmittelyjen ja Catalanin perheen C_n välille. (Vihje: jokainen ryhmittely voidaan esittää binääripuuna, jonka lehdet koostuvat tulon termeistä.)

Laskuharjoituksen 3 vastaukset

Tehtävä 1

Ositus $1+3+4+6+6+8$ on käänteisessä standardimuodossa (reverse standard form); standardimuoto on $8+6+6+4+3+1$. Rsf-lex rank on leksikografinen rank osituksien listaesityksille käänteisessä standardimuodossa. Osituksen rsf-rank voidaan laskea seuraavan rekursion (kirjan s. 76) avulla: Oletetaan, että rankattava ositus on standardimuodossa $[a_1, \ldots, a_n]$, missä $a_1 \geq \cdots \geq a_n$. Rekursion perustapauksessa $n = 1$ on aina $\mathsf{rank}([a_1]) = 0$. Tapauksessa $n > 1$ rekursioaskel on

$$\mathsf{rank}([a_1, \ldots, a_n]) = \begin{cases} \mathsf{rank}([a_1, \ldots, a_{n-1}]) & \text{jos } a_n = 1 \\ \mathsf{rank}([a'_1, \ldots, a'_n]) + P(m-1, n-1) & \text{jos } a_n > 1, \end{cases}$$

missä $a'_j = a_j - 1$ kaikilla $1 \leq j \leq n$ ja $m = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Soveltamalla rekursioyhtälöä saadaan

$$\mathsf{rank}([8,6,6,4,3,1]) = \mathsf{rank}([8,6,6,4,3]) = \mathsf{rank}([7,5,5,3,2]) + P(27-1, 5-1),$$

josta edelleen

$$\begin{aligned}
\mathsf{rank}([7,5,5,3,2]) &= \mathsf{rank}([6,4,4,2,1]) + P(22-1, 5-1) \\
&= \mathsf{rank}([6,4,4,2]) + P(21,4), \\
\mathsf{rank}([6,4,4,2]) &= \mathsf{rank}([5,3,3,1]) + P(16-1, 4-1) \\
&= \mathsf{rank}([5,3,3]) + P(15,3), \\
\mathsf{rank}([5,3,3]) &= \mathsf{rank}([4,2,2]) + P(11-1, 3-1), \\
\mathsf{rank}([4,2,2]) &= \mathsf{rank}([3,1,1]) + P(8-1, 3-1) \\
&= \mathsf{rank}([3]) + P(7,2) = P(7,2).
\end{aligned}$$

Yhdistämällä saadaan:

$$\begin{aligned}
\mathsf{rank}([8,6,6,4,3,1]) &= P(26,4) + P(21,4) + P(15,3) + P(10,2) + P(7,2) \\
&= 136 + 72 + 19 + 5 + 3 = 235.
\end{aligned}$$

Seuraajan etsiminen (standardimuotoiselle ositukselle):

1. Etsitään listan ensimmäinen osalista joka ei ole jaettu tasan, eli pienin i, jolle $a_1 > a_i + 1$,
2. kasvatetaan a_i:tä yhdellä ja asetetaan $a_2, \ldots, a_{i-1}$ minimiarvoonsa ($= a_i$),
3. täsmätään summa asettamalla $a_1 = m - \sum_{i=2}^{n} a_i$.

Eli $[8,6,6,4,3,1]$:lle $i = 2$. Asetetaan $a_2 = a_2 + 1 = 7$. Lopuksi $a_1 = 28 - 7 - 6 - 4 - 3 - 1 = 7$, jolloin saadaan ositus $[7,7,6,4,3,1]$.

Tehtävä 2

Oletetaan aluksi, että ryhmäjaot voidaan tehdä mielivaltaisesti. Jos viidestä ryhmästä $0 \le k \le 4$ jätetään tyhjäksi, jaetaan henkilöt jäljellä oleviin $5-k$ ryhmään. Numeroidaan ei-tyhjät ryhmät $1, \ldots, 5-k$, ja merkitään a_j:llä ryhmään j kuuluvien henkilöiden lukumäärää. Nyt on selvästi $a_j \ge 1$ kaikilla $j = 1, \ldots, 5-k$, ja toisaalta $\sum_{j=1}^{5-k} a_j = 20$. Näin ollen joukko $\{(a_1, \ldots, a_{5-k}) \ : \ a_j \ge 1 \text{ ja } \sum_{j=1}^{5-k} a_j = 20\}$ käsittää kaikki mahdolliset tavat jakaa 20 henkilöä *numeroituihin* ryhmiin. Koska ryhmät eivät ole numeroituja, lasketaan tällöin kuitenkin tietty osuus asetelmia useampaan kertaan; esimerkiksi asetelmat $(1, 1, 1, 1, 16)$ ja $(16, 1, 1, 1, 1)$ tapauksessa $k = 0$ ovat samanlaisia. Samanlaisten asetelmien kertautuminen voidaan välttää vaatimalla lisäksi $a_1 \le \cdots \le a_{5-k}$. Tällöin huomataan, että joukon

$$\mathcal{P}(20, 5-k) := \{(a_1, \ldots, a_{5-k}) \ : \ 1 \le a_1 \le \cdots \le a_{5-k} \text{ ja } \sum_{j=1}^{5-k} a_j = 20\}$$

alkiot vastaavat itse asiassa luvun 20 erilaisia osituksia $5-k$ osaan, joten joukossa on $P(20, 5-k)$ erilaista asetelmaa. Näin ollen erilaisia asetelmia on kaiken kaikkiaan

$$\sum_{k=0}^{4} P(20, 5-k) = P(20, 5) + P(20, 4) + \cdots + P(20, 1) = 192.$$

Kielletään nyt sellaiset asetelmat, joissa jotkin kaksi ryhmää ovat saman kokoisia. Tässä tapauksessa selvästi enintään yksi ryhmä voidaan jättää tyhjäksi. Olkoon $0 \le k \le 1$ tyhjien ryhmien lukumäärä. Jäljellä olevat $5-k$ ryhmää tulisi nyt täyttää siten, että missään kahdessa ryhmässä ei ole samaa määrää jäseniä. Tämä voidaan tehdä vaatimalla $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{5-k}$ ja $\sum_{j=1}^{5-k} a_j = 20$. Näin ollen erilaisia asetelmia on yhtä monta kuin joukossa

$$\mathcal{P}'(20, 5-k) = \{(a_1, \ldots, a_{5-k}) \ : \ 1 \le a_1 < \cdots < a_{5-k} \text{ ja } \sum_{j=1}^{5-k} a_j = 20\}$$

on alkioita. Nyt huomataan, että kuvaus

$$(a_1, \ldots, a_{5-k}) \mapsto (a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, \ldots, a_{5-k} - (5-k-1))$$

joukolta $\mathcal{P}'(20, 5-k)$ osituksien joukolle $\mathcal{P}(20 - 1 - 2 - \cdots - (5-k-1), 5-k)$ on bijektio, joten

$$|\mathcal{P}'(20, 5-k)| = P(20 - \frac{(5-k-1)(5-k)}{2}, 5-k),$$

ja näin ollen erilaisia tapoja jakaa henkilöt ryhmiin tehtävän vaatimalla tavalla on

$$P(20-10,5)+P(20-6,4)=P(10,5)+P(14,4)=7+23=30.$$

kappaletta.

Tehtävä 3(a)

Annetun nimetyn puun graafiesityksestä $\mathcal{E}$ saadaan laskettua Prüferin listaesitys seuraavalla tavalla:

1. $i = 1$
2. Olkoon v korkeanumeroisin solmu, jonka asteluku on 1. Etsi kaari $\{v, v'\} \in \mathcal{E}$ ja aseta $L[i] = v'$. Poista graafista kaari $\{v, v'\}$.
3. $i = i + 1$ ja jos $i < n - 1$ siirry kohtaan 2.
4. Prüferin listaesitys on $[L[1], \ldots, L[n-2]]$.

Algoritmin suoritus on alla olevassa taulukossa:

Solmujen asteluvut	i	v	$L[i]$	Poistettu kaari
$3,1,2,2,2,1,1$	1	7	3	$\{7,3\}$
$3,1,1,2,2,1,0$	2	6	1	$\{6,1\}$
$2,1,1,2,2,0,0$	3	3	4	$\{3,4\}$
$2,1,0,1,2,0,0$	4	4	1	$\{4,1\}$
$1,1,0,0,2,0,0$	5	2	5	$\{2,5\}$

Prüferin listaesitykseksi saadaan siis $[3,1,4,1,5]$.

Tehtävä 3(b)

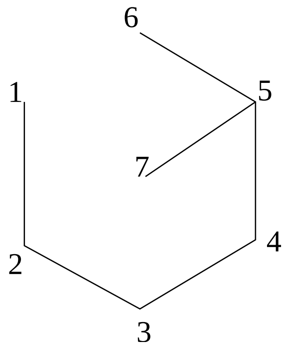
Seurataan kirjan algoritmia 3.11. Syöteenä lista $[L[1], L[2], \ldots, L[n-2]]$.

1. Puun solmujen lkm n = listan pituus + 2.
2. Solmun asteluku = solmun esiintymiskerrat listassa + 1.
3. Lisätään $L[n-1] = 1$.
4. Toistetaan kierroksille $i = 1, \ldots, n-1$.
   (a) Etsitään suurin solmu x, jonka asteluku on 1.
   (b) Lisätään kaari $\{x, L[i]\}$ puuhun.
   (c) Vähennetään solmujen x ja $L[i]$ astelukua yhdellä.

Annetun listan $[5, 5, 4, 3, 2]$ pituus on 5, joten puussa on $n = 7$ solmua. Edetään algoritmin mukaisesti.

		asteluvut							
i	$L[i]$	1	2	3	4	5	6	7	$x, L[i]$
1	5	1	2	2	2	3	1	$\underline{1}$	$7, 5$
2	5	1	2	2	2	2	$\underline{1}$	0	$6, 5$
3	4	1	2	2	2	$\underline{1}$	0	0	$5, 4$
4	3	1	2	2	$\underline{1}$	0	0	0	$4, 3$
5	2	1	2	$\underline{1}$	0	2	0	0	$3, 2$
6	1	1	$\underline{1}$	0	0	0	0	0	$2, 1$

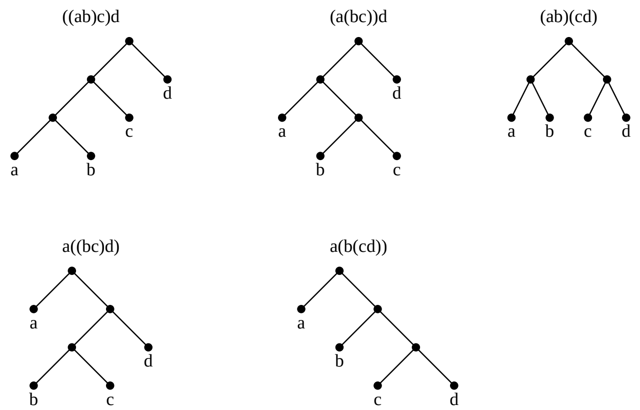
Tuloksena saadaan allaolevan kuvan mukainen graafi.



Kuva 1: Prüferin listaesitystä $[5, 5, 4, 3, 2]$ vastaava graafi.

Tehtävä 4

Jokaista $n + 1$ termin tulon ryhmittelyä kahden alkion tuloiksi vastaa yksikäsitteisesti juurellinen järjestetty binääripuu, jonka haaroissa on kertolaskuoperaattori ja lehdissä tulon termit. Kuvassa 2 on esitetty kaikki neljän termin tulon eri ryhmittelytavat ja näitä vastaavat jäsennyspuut.



Kuva 2: Neljän termin tulon eri ryhmittelytavat ja näitä vastaavat jäsennyspuut.

Täysi binääripuu (full binary tree) on juurellinen puu, jossa jokainen solmu on joko lehtisolmu, tai sillä on kaksi lapsisolmua. Oletetaan lisäksi, että jokaisen solmun lapsisolmut on järjestetty, jotta voidaan puhua käsitteistä "vasen" ja "oikea" lapsi. Tällöin on selvää, että jokainen $n + 1$ termin tulon jäsennyspuu on täysi binääripuu, jossa on $n + 1$ lehtisolmua, ja kääntäen. Induktiolla voidaan osoittaa seuraava aputulos:

Aputulos. Täydessä binääripuussa, jossa on $n + 1$ lehtisolmua, on täsmälleen n solmua, joilla on kaksi lapsisolmua.

Todistus. Perustapauksessa $n = 0$ väite on ilmeinen. Oletetaan nyt, että väite pätee tapauksissa $0 \leq k \leq n$, ja tarkastellaan täyttä binääripuuta, jossa on $(n+1)+1 \geq 2$ lehtisolmua. On selvää, että tällöin puun juurella tulee olla kaksi lapsisolmua. Olkoon l_1 juuren vasemman lapsen virittämän alipuun lehtisolmujen lukumäärä, ja l_2 vastaavasti juuren oikean lapsen virittämän alipuun lehtisolmujen lukumäärä. Koska juuri ei ole lehtisolmu, on oltava $n + 2 = l_1 + l_2$ ja $l_1, l_2 \geq 1$, joten $l_1 \leq n+1$ ja $l_2 \leq n+1$. Näin ollen induktio-oletusta voidaan soveltaa juuren vasemman ja oikean lapsen virittämiin alipuihin, jotka selvästi ovat täysiä binääripuita. Koko puussa on siten $1+(l_1-1)+(l_2-1) = l_1+l_2-1 = n+1$ solmua (juuri mukaanluettuna), joilla on kaksi lapsisolmua. $\square$

Aputuloksen välitön seuraus on, että täydessä binääripuussa, jossa on $n + 1$ lehtisolmua, on täsmälleen $2n$ kaarta.

Catalanin perhe C_n koostuu kaikista $2n$-pituisista binäärijonoista $a_1a_2\cdots a_{2n}$, joille pätee

(a) jonossa on täsmälleen n nollaa ja n ykköstä, ja

(b) alijonossa $a_1a_2\cdots a_i$ on vähintään yhtä monta nollaa kuin siinä on ykköstä kaikilla $1 \le i \le 2n$.

Nyt on helppoa johtaa vastaavuus $(n+1)$-lehtisolmuisten täysien binääripuiden ja Catalanin perheen välille:

Olkoon annettu täysi binääripuu, jolla on $n+1$ lehtisolmua. Merkitään kaikki vasempaan lapseen johtavat kaaret nollalla, ja oikeaan lapseen johtavat kaaret ykkösellä. Käydään puu nyt läpi esijärjestyksessä (ensin solmu itse, sitten rekursiivisesti vasen lapsi, ja lopuksi rekursiivisesti oikea lapsi) siten, että tiettyyn solmuun saavuttaessa tulostetaan solmun isään johtavan kaaren numero.

On selvää, että tällöin jokainen $2n$ kaaresta tulostetaan kerran. Lisäksi tulostejono täyttää ehdon (a), koska jokaisella solmulla, jolla on vasen lapsi, on myös oikea lapsi; toisaalta ehto (b) täyttyy, koska jokaisen kaksilapsisen solmun vasempaan lapseen vievän kaaren numero tulostetaan aina ennen oikeaan lapseen vievän kaaren numeroa.

Toisaalta jos on annettu Catalanin perheeseen kuuluva binäärijono $a_1a_2\cdots a_{2n}$, voidaan sitä vastaava täysi binääripuu konstruoida seuraavasti:

1. Alussa puu koostuu vain sen juuresta, joka on lehtisolmu. Asetetaan juuri työsolmuksi.
2. Toistetaan järjestyksessä kaikille $i = 1, 2, \ldots, 2n$:
   (i) Jos $a_i = 0$, luodaan työsolmulle vasen lapsi, ja asetetaan lapsi työsolmuksi.
   (ii) Jos $a_i = 1$, edetään työsolmusta puun juurta kohti ensimmäiseen sellaiseen solmuun, jolla ei ole oikeata lapsisolmua. Luodaan tälle solmulle oikea lapsisolmu, ja asetetaan se työsolmuksi.

Konstruktio on hyvin määritelty, koska tasapainoehdon (b) mukaan kohdassa (ii) solmu, jolle voidaan lisätä oikea lapsi, on aina olemassa. Toisaalta tasapainoehdosta (a) saadaan, että jokaiselle solmulle, jolle on lisätty vasen lapsi kohdan (i) mukaisesti, lisätään myös oikea lapsi kohdan (ii) mukaisesti. Konstruktion tuloksena syntyy täysi binääripuu, jossa on $2n+1$ solmua ja $2n$ kaarta. Nyt voidaan jälleen osoittaa induktiolla, että tällaisessa puussa on oltava $n+1$ lehtisolmua. Näin ollen konstruktio tuottaa aina tulokseksi $(n+1)$-lehtisolmuisen täyden binääripuun.

Konstruktioiden määräämät kuvaukset puilta binäärijonoille (ja kääntäen binäärijonoilta puille) on nyt helppo todeta toistensa käänteiskuvauksiksi.