Laskuharjoitus 2

2.2.2004

1. Permutaation sykli- ja listaesitykset.

   (a) Esitä permutaatio $\pi_1 = [2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ pistevieraiden syklien tulona.

   (b) Esitä permutaatio $\pi_2 = (1, 5, 6)(2, 4, 3)(7)$ listana.

   (c) Määritä käänteispermutaatiot π_1^{-1} ja π_2^{-1}.

   (d) Määritä tulot $\pi_1\pi_2$ ja $\pi_2\pi_1$.

2. Oletetaan, että $p, q, r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_l$, missä $k, l \geq 0$, ovat toisistaan poikkeavia alkioita. Sievennä seuraavat syklien tuloina annetut permutaatiot pistevieraiden syklien tuloiksi:

   (a) $(p, q)(p, r_1, \ldots, r_k, q, s_1, \ldots, s_l)$

   (b) $(p, q)(p, r_1, \ldots, r_k)(q, s_1, \ldots, s_l)$

3. Permutaatio π on *parillinen* jos se voidaan esittää parillisen määrän transpositioita tulona. Vastaavasti π on *pariton* jos se voidaan esittää parittoman määrän transpositioita tulona.

   Osoita, että jokainen permutaatio on joko pariton tai parillinen.

4. Määritä permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ rank ja seuraaja sekä leksikografisessa että Trotter-Johnson -järjestyksessä.

Laskuharjoituksen 2 vastaukset

Kerrataan aluksi muutamia permutaatioihin liittyviä määritelmiä. Olkoon X äärellinen ei-tyhjä joukko.

- Joukon X permutaatio σ on *r-sykli* jos on olemassa alkiot $a_1, \ldots, a_r \in X$ siten, että

  $$\sigma(a_1) = a_2, \quad \sigma(a_2) = a_3, \quad \ldots, \sigma(a_{r-1}) = a_r, \quad \sigma(a_r) = a_1,$$

  ja $\sigma(a) = a$ kaikilla $a \in X \setminus \{a_1, \ldots, a_r\}$. Edellinen r-sykli on tapana kirjoittaa $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$. Sama sykli voidaan tällä tavoin esittää useammalla tavalla, koska syklin alkupiste on mielivaltainen; esim. $(a_2, a_3, \ldots, a_r, a_1) = (a_1, a_2, \ldots, a_r)$.

- *Transpositio* on mielivaltainen joukon X 2-sykli.

- Joukon X permutaatiot σ_1, σ_2 ovat *pistevieraat* jos millään $x \in X$ ei päde sekä $\sigma_1(x) \neq x$ että $\sigma_2(x) \neq x$.

- Joukon X permutaatioiden π_1, π_2 *tulo* $\pi_1\pi_2$ määritellään kaikille $x \in X$ säännöstä $\pi_1\pi_2(x) = \pi_1 \circ \pi_2(x) = \pi_1(\pi_2(x))$.

- Joukon X permutaation π käänteispermutaatio π^{-1} on joukon X permutaatio, jolle pätee $\pi\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = \iota$, missä ι on identiteetti eli $\iota(x) = x$, kaikilla $x \in X$.

- Jokainen joukon X permutaatio voidaan esittää (syklien järjestystä vaille) yksikäsitteisesti pistevieraiden syklien tulona, jossa jokainen $x \in X$ esiintyy täsmälleen yhdellä syklillä.

Tehtävä 1 (a)

Permutaation π_1 listaesityksestä $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ nähdään, että

$$\pi_1(1) = 2, \quad \pi_1(2) = 4, \quad \pi_1(4) = 7, \quad \pi_1(7) = 1,$$

joten alkion 1 sisältävä sykli on $(1, 2, 4, 7)$. Pienin joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ alkio joka ei ole tällä syklillä on 3. Alkion 3 sisältävä sykli on $(3, 6)$, koska

$$\pi_1(3) = 6, \quad \pi_1(6) = 3.$$

Pienin alkio joka ei ole edellisillä sykleillä on 5, jolle pätee $\pi_1(5) = 5$. Nyt kaikki joukon $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ alkioiden syklit on käyty läpi, joten saadaan

$$\pi_1 = (1, 2, 4, 7)(3, 6)(5).$$

Tehtävä 1 (b)

Sykliesityksestä $\pi_2 = (1, 5, 6)(2, 4, 3)(7)$ nähdään

$$\begin{array}{llll} \pi_2(1) = 5, & \pi_2(2) = 4, & \pi_2(3) = 2, & \pi_2(4) = 3, \\ \pi_2(5) = 6, & \pi_2(6) = 1, & \pi_2(7) = 7, & \end{array}$$

joten $\pi_2 = [5, 4, 2, 3, 6, 1, 7]$.

Tehtävä 1 (c)

Permutaation käänteispermutaatio muodostetaan helposti sen sykliesityksestä kääntämällä sekä syklien, että syklien alkioiden järjestys päinvastaiseksi. Esimerkiksi

$$\pi_1^{-1} = (5)(6, 3)(7, 4, 2, 1), \qquad \pi_2^{-1} = (7)(3, 4, 2)(6, 5, 1).$$

Tehtävä 1 (d)

Tulo $\pi_1\pi_2$ on sykliesityksien avulla

$$\pi_1\pi_2 = (1, 2, 4, 7)(3, 6)(5)(1, 5, 6)(2, 4, 3)(7),$$

joka voidaan sieventää muotoon

$$\pi_1\pi_2 = (1, 5, 3, 4, 6, 2, 7)$$

määrittämällä jokaisen alkion kuva. Määritettäessä alkion kuvaa syklien tulossa syklejä luetaan järjestyksessä *oikealta vasemmalle*. Esimerkiksi edellisessä tulossa sykli (7) pitää alkion 1 paikallaan, kuten myös (2,4,3). Sykli $(1, 5, 6)$ kuvaa alkion 1 alkiolle 5. Sykli (5) pitää alkion 5 paikallaan, kuten myös syklit $(3, 6)$ ja $(1, 2, 4, 7)$. Näin ollen $\pi_1\pi_2(1) = 5$.

Vastaavasti, tulo $\pi_2\pi_1$ on sykliesityksien avulla

$$\pi_2\pi_1 = (1, 5, 6)(2, 4, 3)(7)(1, 2, 4, 7)(3, 6)(5),$$

joka voidaan sieventää muotoon

$$\pi_2\pi_1 = (1, 4, 7, 5, 6, 2, 3)$$

määrittämällä jokaisen alkion kuva. Huomaa, että permutaatioiden yhdistäminen (tulo) ei ole kommutatiivinen laskutoimitus, toisin sanoen $\pi_1\pi_2 \neq \pi_2\pi_1$.

Tehtävä 2

Tehtävän tulot ovat sievennetyssä muodossa

$$(p,q)(p,r_1,\ldots,r_k,q,s_1,\ldots,s_l) = (p,r_1,\ldots,r_k)(q,s_1,\ldots,s_l)$$

ja

$$(p,q)(p,r_1,\ldots,r_k)(q,s_1,\ldots,s_l) = (p,r_1,\ldots,r_k,q,s_1,\ldots,s_l).$$

Näin ollen transpositiolla vasemmalta kertominen joko "leikkaa" syklin kahtia, tai "yhdistää" kaksi pistevierasta sykliä.

Edellisestä huomataan että jos mielivaltainen permutaatio π kerrotaan vasemmalta transpositiolla (p,q), niin tällöin permutaatiossa $(p,q)\pi$ on joko yksi sykli enemmän (a-kohta) kuin permutaatiossa π, tai yksi sykli vähemmän (b-kohta).

Tehtävä 3

Jokainen joukon $\{1,\ldots,n\}$ permutaatio π voidaan esittää järjestystä vaille yksikäsitteisesti pistevieraiden syklien tulona:

$$\pi = (a_{1,1},a_{1,2},\ldots,a_{1,m_1})\cdots(a_{k,1},a_{k,2},\ldots,a_{k,m_k}),$$

missä $k \geq 1$ ja $m_j \geq 1$ kaikilla $j = 1,\ldots k$. Sykli $(a_{j,1},\ldots,a_{j,m_j})$ voidaan esittää $m_j - 1$:n transposition tulona, esimerkiksi

$$(a_{j,1},a_{j,2})(a_{j,2},a_{j,3})\cdots(a_{j,m_j-2},a_{j,m_j-1})(a_{j,m_j-1},a_{j,m_j}).$$

Olkoon $\lambda(\pi)$ transpositioiden lukumäärä esitettäessä permutaatio π transpositioiden tulona. Mielivaltaiselle joukon $\{1,\ldots,n\}$ permutaatiolle π pätee siis

$$\lambda(\pi) = \sum_{j=1}^{k}(m_j - 1),$$

missä k on permutaation pistevieraiden syklien lukumäärä ja $m_1,\ldots,m_k$ niiden pituudet. Kuvaus λ on hyvin määritelty, koska arvo $\lambda(\pi)$ ei riipu syklien esitysjärjestyksestä.

Tarkastellaan miten π:n kertominen mielivaltaisella transpositiolla (x,y) vaikuttaa λ:n arvoon. Tarkastelu jakautuu kahteen tapaukseen kuten tehtävässä 2:

(i) x ja y kuuluvat samaan permutaation π sykliin $(a_{j,1},\ldots,a_{j,m_j})$ eli $x = a_{j,p}$ ja $y = a_{j,q}$ joillakin $p < q$. Tällöin sykli $(a_{j,1},\ldots,a_{j,m_j})$ jakautuu permutaatiossa $(x,y)\pi$ kahdeksi pistevieraaksi sykliksi $(a_{j,1},\ldots,a_{j,p-1},a_{j,q},\ldots,a_{j,m_j})$ ja $(a_{j,p},\ldots,a_{j,q-1})$, muut π:n syklit eivät muutu. Näin ollen $\lambda((x,y)\pi) = \lambda(\pi) - (m_j - 1) + (m_j - (q-p) - 1) + (q-p-1) = \lambda(\pi) - 1$, sillä ensimmäisen uuden syklin pituus on $m_j - (q-p)$ ja toisen $q-p$.

(ii) x ja y kuuluvat eri sykleihin $(a_{j,1}, \ldots, a_{j,m_j})$ ja $(a_{l,1}, \ldots, a_{l,m_l})$ ja oletetaan, että $x = a_{j,1}$ ja $y = a_{l,1}$. Tällöin permutaatiossa $(x, y)\pi$ on edellä olevien syklien sijasta sykli $(a_{j,1}, \ldots, a_{j,m_j}, a_{l,1}, \ldots, a_{l,m_l})$ ja muut syklit säilyvät muuttumattomina. Näin ollen $\lambda((x, y)\pi) = \lambda(\pi) - (m_j - 1) - (m_l - 1) + (m_j + m_l - 1) = \lambda(\pi) + 1$.

Näin ollen $\lambda((x, y)\pi) \equiv (\lambda(\pi) + 1) \mod 2$.

Lopuksi oletetaan, että mielivaltainen joukon $\{1, \ldots, n\}$ permutaatio τ on esitettävissä kahdella eri tavalla transpositioiden tulona: $\tau = (x_1, y_1) \cdots (x_m, y_m)$ ja $\tau = (x'_1, y'_1) \cdots (x'_{m'}, y'_{m'})$. Koska

$$\begin{aligned} \lambda(\tau) &= \lambda((x_2, y_2) \cdots (x_m, y_m)) + 1 = \ldots \\ &= m - 1 + \lambda((x_m, y_m)) = m \pmod 2 \end{aligned}$$

ja toisaalta

$$\lambda(\tau) = \lambda((x'_2, y'_2) \cdots (x'_{m'}, y'_{m'})) + 1 = \ldots = m' \pmod 2,$$

pätee, että joko m ja m' ovat molemmat parillisia tai molemmat parittomia.

Tehtävä 4

Tarkastellaan ensin leksikografista järjestystä. Permutaation

$$\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)]$$

leksikografinen seuraaja määritetään seuraavasti:

1. Etsitään suurin $j \in \{1, \ldots, n-1\}$, jolle pätee $\pi(j) < \pi(j+1)$. Jos tällaista ei ole olemassa, kyseessä on leksikografisessa järjestyksessä viimeinen permutaatio $[n, n-1, \ldots, 1]$, jolla ei ole seuraajaa.

   Permutaatiolle $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ on $j = 3$.

2. Etsitään alkioista $\pi(j+1), \ldots, \pi(n)$ pienin alkio, joka on suurempi kuin $\pi(j)$.

   Permutaatiolle $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tämä alkio on 7.

3. Vaihdetaan edellisessä kohdassa valittu alkio ja $\pi(j)$ keskenään. Tulokseksi saadaan permutaatio π'.

   Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa pätee $\pi' = [2, 4, 7, 6, 5, 3, 1]$.

4. Järjestetään alkiot $\pi'(j+1), \ldots, \pi'(n)$ kasvavaan järjestykseen (koska alkiot ovat valmiiksi laskevassa järjestyksessä, riittää kääntää niiden järjestys). Tuloksena saadaan π:n leksikografinen seuraajapermutaatio.

   Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa seuraaja on $[2, 4, 7, 1, 3, 5, 6]$.

Permutaation $\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)]$ leksikografinen rank määritetään rekursiivisesti:

1. Perustapaus $n = 1$: $\mathsf{rank}(\pi) = 0$.

2. Yleinen tapaus $n \geq 2$:

$$\mathsf{rank}(\pi) = (\pi(1) - 1)(n-1)! + \mathsf{rank}(\pi'),$$

missä

$$\pi'(j) = \begin{cases} \pi(j+1) & \text{jos } \pi(j+1) < \pi(1); \\ \pi(j+1) - 1 & \text{jos } \pi(j+1) > \pi(1). \end{cases}$$

Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ rank on edellisen perusteella

$$\begin{aligned}
&\mathsf{rank}([2,4,6,7,5,3,1]) = \\
&= (2-1)6! + \mathsf{rank}([3,5,6,4,2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + \mathsf{rank}([4,5,3,2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + \mathsf{rank}([4,3,2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + (4-1)3! + \mathsf{rank}([3,2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + (4-1)3! + (3-1)2! + \mathsf{rank}([2,1]) \\
&= (2-1)6! + (3-1)5! + (4-1)4! + (4-1)3! + (3-1)2! + (2-1)1! \\
&= 1 \cdot 6! + 2 \cdot 5! + 3 \cdot 4! + 3 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! \\
&= 1055.
\end{aligned}$$

Siirrytään nyt Trotter-Johnson järjestykseen. Trotter-Johnson järjestyksessä permutaation

$$\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)]$$

seuraaja määritetään:

1. Etsitään $j \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että $\pi(j) = n$.

   Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa $\pi(4) = 7$.

2. Määritetään, onko permutaatio $\pi' = [\pi(1), \ldots, \pi(j-1), \pi(j+1), \ldots, \pi(n)]$ parillinen vai pariton.

   Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa

   $$\pi' = [2,4,6,5,3,1] = (1,2,4,5,3,6) = (1,2)(2,4)(4,5)(5,3)(3,6)$$

   on pariton.

3. Jos π' on parillinen ja $j > 1$: permutaation π seuraaja saadaan vaihtamalla alkiot $\pi(j-1)$ ja $\pi(j)$ keskenään.

4. Jos π' on parillinen ja $j = 1$: permutaation π seuraaja on

$$[n, \pi''(1), \pi''(2), \ldots, \pi''(n-1)],$$

missä π'' on permutaation π' Trotter-Johnson seuraaja.

5. Jos π' on pariton ja $j < n$: permutaation π seuraaja saadaan vaihtamalla alkiot $\pi(j)$ ja $\pi(j+1)$ keskenään.

   Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa Trotter-Johnson seuraaja on näin ollen $[2, 4, 6, 5, 7, 3, 1]$.

6. Jos π' on pariton ja $j = n$: permutaation π seuraaja on

$$[\pi''(1), \pi''(2), \ldots, \pi''(n-1), n],$$

missä π'' on permutaation π' Trotter-Johnson seuraaja.

Permutaation π Trotter-Johnson rank lasketaan rekursiivisesti:

1. Perustapaus $n = 1$: $\mathsf{rank}(\pi) = 0$.

2. Etsitään $j \in \{1, \ldots, n\}$ siten, että $\pi(j) = n$.

3. Määritetään rekursiivisesti permutaation

$$\pi' = [\pi(1), \ldots, \pi(j-1), \pi(j+1), \ldots, \pi(n)]$$

rank.

4. Jos $\mathsf{rank}(\pi')$ on parillinen, asetetaan

$$\mathsf{rank}(\pi) = n\mathsf{rank}(\pi') + n - j.$$

5. Jos $\mathsf{rank}(\pi')$ on pariton, asetetaan

$$\mathsf{rank}(\pi) = n\mathsf{rank}(\pi') + j - 1.$$

Permutaation $[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$ tapauksessa:

n	π	j	$\mathsf{rank}(\pi)$
1	$[1]$	1	0
2	$[2, 1]$	1	$2 \cdot 0 + (2-1) = 1$
3	$[2, 3, 1]$	2	$3 \cdot 1 + (2-1) = 4$
4	$[2, 4, 3, 1]$	2	$4 \cdot 4 + (4-2) = 18$
5	$[2, 4, 5, 3, 1]$	3	$5 \cdot 18 + (5-3) = 92$
6	$[2, 4, 6, 5, 3, 1]$	3	$6 \cdot 92 + (6-3) = 555$
7	$[2, 4, 6, 7, 5, 3, 1]$	4	$7 \cdot 555 + (4-1) = 3888$