T-79.149 Diskreetit rakenteet, syksy 2004
Harjoitus 3, 6.10.

1. Osoita, että jos $a = \langle a_n \rangle$, $b = \langle b_n \rangle$ ja $c = \langle c_n \rangle$ ovat (kompleksisia) lukujonoja, missä $c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}$, niin jonojen eksponentiaalisten generoivien funktioiden kesken on voimassa suhde $\hat{c}(z) = \hat{a}(z)\hat{b}(z)$.

2. Ns. *Bellin luku* b_n ilmaisee, montako erilaista ositusta (ekvivalenssirelaatiota) voidaan muodostaa n alkion perusjoukossa. (Toisen lajin Stirlingin lukuja käyttäen voitaisiin siis kirjoittaa $b_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\}$.) Osoita, että Bellin luvut b_n toteuttavat rekursioyhtälön
$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k, \quad b_0 = 1,$$
ja johda tämän perusteella jonon $b = \langle b_n \rangle$ eksponentiaalinen generoiva funktio $\hat{b}(z)$. (*Vihje:* Derivoi jonon egf-sarja ja ratkaise syntyvä differentiaaliyhtälö.)

3. Olkoot $\mathcal{A} = (A, w_A)$ ja $\mathcal{B} = (B, w_B)$ kaksi painotettujen kombinatoristen struktuurien perhettä. Muodostetaan näiden *tulo* $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = (C, w_C)$ määrittelemällä perusjoukossa $C = A \times B$ painofunktio $w_C((\alpha, \beta)) = w_A(\alpha) + w_B(\beta)$. Osoita, että näin määritelty tulokonstruktio on tgf-kelpoinen, so. että tuloperheen struktuurien tgf voidaan laskea suoraan komponenttiperheiden tgf:istä. (*Ohje:* Muodosta tgf-summat yli kuhunkin perheeseen kuuluvien struktuurien, so. $c(z) = \sum_{\sigma \in C} z^{w_C(\sigma)} = \cdots$)